

Fachdidaktik Mathematik: Mathematik erleben (Teil 1)

Um was es geht?

Im folgenden werden Beispiele zum Thema Trigonometrie gezeigt, in denen sich die Schüler aktiv mit einer Aufgabenstellung auseinander setzen und Mathematik dabei erleben können.

Trigonometrie in der Beruflichen Schule

Ab der zweijährigen Berufsfachschule wird das Thema Trigonometrie in so gut wie allen Schularten im Mathematikunterricht behandelt.

Schulart	Lehrplaneinheit	Lehrplaninhalt
BAS BFS	3	Berechnung am rechtwinkligen Dreieck: Definition von Sinus, Kosinus und Tangens. Winkel- und Längenberechnungen in der Ebene und im Raum.
BK	1	Funktionen und ihre Schaubilder, zugehörige Gleichungen: Trigonometrische Funktionen.
BG	1	Funktionen in Anwendungen und ihre Schaubilder, zugehörige Gleichungen: [...] trigonometrische Funktionen [...]
BOS	2	Funktionen und ihre Schaubilder: Trigonometrische Funktionen

(Die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit)

Trigonometrie unterhalb der FSR

Die Schülerinnen und Schüler sollen mit den Winkelfunktionen vertraut werden, um sie in der Geometrie zur Anwendung bringen zu können. Bei der Behandlung des Themas ist es wichtig, dass die Lehrerin oder der Lehrer sich bewusst ist, dass der Lerngegenstand sehr abstrakt ist und daher vielen Schülerinnen und Schülern große Mühe bereitet.

Ähnliche rechtwinklige Dreiecke und Seitenverhältnisse

Um die Winkelfunktionen wie Sinus, Kosinus und Tangens verstehen zu können ist die Erkenntnis wichtig, dass bei verschiedenen rechtwinkligen Dreiecken mit den selben Winkeln die Seitenverhältnisse immer gleich sind (Ähnlichkeit von rechtwinkligen Dreiecken). Zu dieser Erkenntnis können die Schülerinnen und Schüler selber kommen. Als Unterstützung erhalten Sie einen sogenannten *Trigonator*. Dabei handelt es sich um ein DIN-A4 großes Instrument mit dem verschiedene rechtwinklige Dreiecke nachgebildet werden können. Von den Dreiecken lassen sich alle Seitenlängen und der Winkel α von entsprechenden Skalen ablesen. Mit Hilfe dieses Instruments können die Schülerinnen und Schüler verschiedene Dreiecke untersuchen und auf Gemeinsamkeiten hin untersuchen. Ein entsprechendes Arbeitsblatt befindet sich hinten im Anhang.

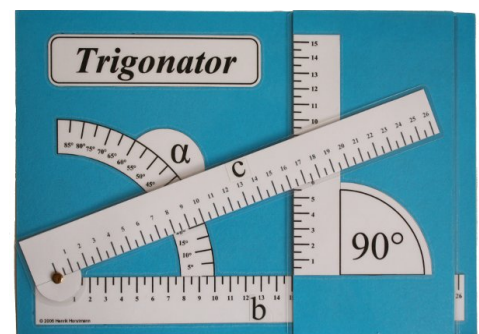


Abbildung 1: Trigonator

Die Erkenntnis über ähnliche rechtwinklige Dreiecke gewinnen die Schülerinnen und

Schüler durch ihr erlebtes.

Anwendung der Trigonometrischen Funktionen

Anstatt mit den Schülerinnen und Schülern nur theoretisch auf dem Papier Berechnungen durch zu führen bietet es sich gerade in der Trigonometrie an, dieses auch praktisch durchzuführen. Dazu werden Gruppen von maximal 4 Teilnehmern gebildet und mit folgendem, Material ausgestattet:

- Winkelmessgerät
- Meterstab
- Papier und Stifte
- Taschenrechner



Abbildung 2: Winkelmessgerät

In der näheren Umgebung wird ein Objekt ausgesucht, dessen Höhe bestimmt werden soll. Dies kann z.B. eine Kirche, ein Strommast oder ähnliches Objekt sein. Unabdingbar ist dabei jedoch, dass das Objekt so hoch ist, dass seine Höhe nicht ohne weiteres mit dem Meterstab bestimmt werden kann.

Bei einer Gruppengröße von maximal vier Teilnehmern ist gewährleistet, dass alle Schülerinnen und Schüler eine Aufgabe haben: ein Teammitglied ist für die Bedienung des Winkelmessgeräts zuständig, ein weiteres muss die gemessenen Werte von der Skala ablesen. Auch die Aufgabe die Werte zu notieren, sowie das Messen von Streckenlängen kann jeweils an ein separates Teammitglied vergeben werden. Nur wenn alle im Team richtig Mitarbeiten kann das Team sein Ziel erreichen.

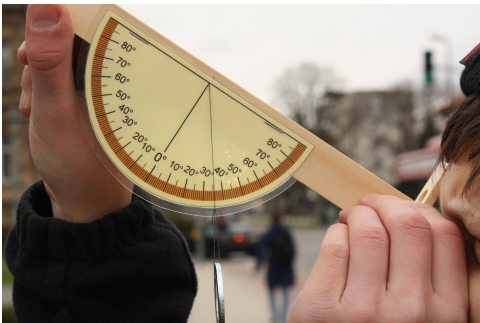


Abbildung 3: Winkelmessgerät in der Anwendung

Bei der Lösung der Aufgabe erleben die Schülerinnen und Schüler die Anwendung der Mathematik. Durch aktives Tun, können sie ihre Erkenntnisse zur Anwendung bringen und damit vertiefen.

Wird als Objekt z.B. ein großer Baum gewählt, so lässt sich auch ein Szenario, bei dem der Baum gefällt werden muss und sichergestellt werden muss, dass beim Umfallen des Baumes keine Beschädigungen entstehen

glaubhaft machen. Die Aufgabe ist sinnvoll und bleibt nicht theoretischen.

Trigonometrie oberhalb der FSR

In Technik und Wissenschaft spielen die Trigonometrischen Funktionen eine wichtige Rolle. Dies spiegelt sich sowohl im Stoff für die Fachhochschulreife, als auch für das Abitur wider.

Von Altgrad zum Bogenmaß

Der erste Schritt besteht meist darin, vom bis dahin bekannten Altgrad weg zu kommen und das

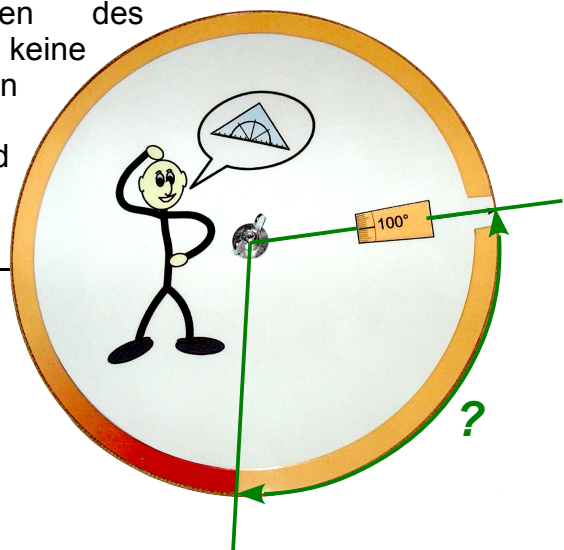


Abbildung 4: Bogenmaßumrechner

Bogenmaß einzuführen. Sowohl die Erkenntnis, dass beide Maße in engem Zusammenhang stehen, als auch die Hintergründe des Bogenmaß können die Schülerinnen und Schüler sich aktiv erarbeiten. Mit Hilfe eines *Bogenmaßumrechners* und einem flexiblen Meterstab werden für verschiedene Winkel die entsprechenden Bogenlängen auf dem Außenkreis des *Bogenmaßumrechners* gemessen.

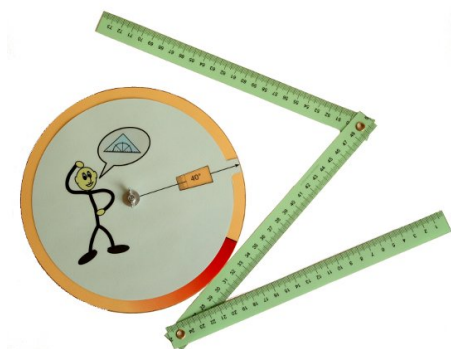


Abbildung 5: Bogenmaßumrechner mit flexiblen Metrestab

Im zweiten Schritt sollen die Schülerinnen und Schüler eine Formel entwickeln mit der ein Winkel in Altgrad ins Bogenmaß umgerechnet werden kann. Mit dieser Formel werden im Anschluss Berechnungen unternommen, die im Anschluss mit den zuvor ermittelten Messergebnissen verglichen werden. Ein entsprechendes Arbeitsblatt befindet sich im Anhang.

Durch dieses Vorgehen bekommt eine abstrakte Formel für die Schülerinnen und Schüler eine Sinnhaftigkeit. Sie können sogar eine Formel auf ihre Richtigkeit überprüfen und feststellen, dass sich mit einer abstrakten Formel

reelle Dinge berechnen lassen.

Sinus und Kosinus für Winkel bis 2π

Am Einheitskreis kann durch ein Faltmodell die Idee der Definition der Trigonometrischen Funktionen für Winkel von $\frac{1}{2}\pi$ bis 2π dargelegt werden. Dabei wird in Schritten von $\frac{1}{2}\pi$ die Definition nach und nach erweitert. Die Schüler können sich dabei selbstständig mit dem Lerngegenstand auseinandersetzen und die Ideen in ihrem Lerntempo nachvollziehen.

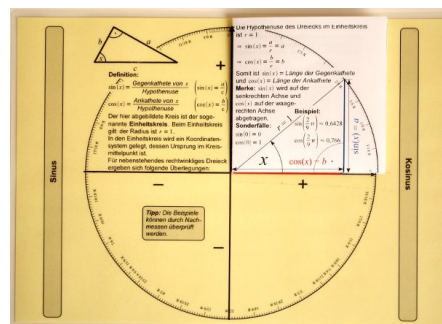
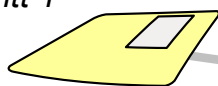
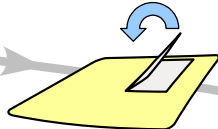


Abbildung 6: Faltmodell

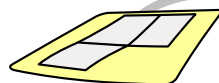
Schritt 1



Schritt 2



Schritt 3



Schritt 4

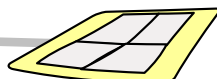


Abbildung 7: Anleitung zum Faltmodell

Sinus und Kosinus am Einheitskreis bestimmen

Um den Umgang mit Sinus und Kosinus zu üben und ein Verständnis für die Zusammenhänge zu erlangen können die Bestimmungen am Einheitskreis mit Hilfe des *Trigonator II* sehr hilfreich sein.

Durch das Einstellen und Ablesen am *Trigonator II* wird das Ermitteln von Werten von Sinus und

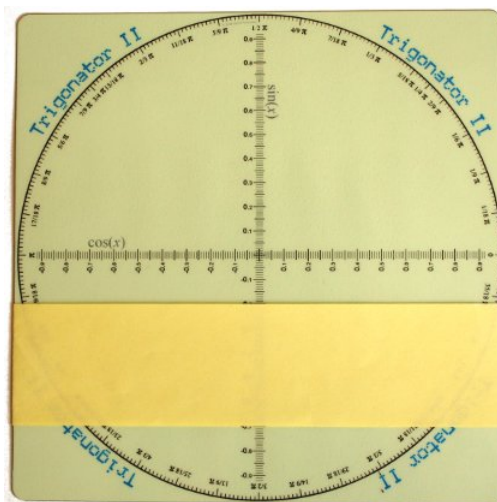


Abbildung 8: Trigonator II

Kosinus geübt und das Verständnis gefördert. Durch das Schreiben einer Anleitung für den *Trigonator II* vertiefen die Schülerinnen und Schüler ihr Verständnis und können gleichzeitig überprüfen, ob der Lernstoff verstanden wurde.

Periodizität

Mit Hilfe einer Schiebetafel können die Schülerinnen und Schüler die Periodizität entdecken. Durch das Modell wird nachvollziehbar veranschaulicht, dass sich nach einer Bogenlänge von 2π die Sinus und Kosinuswerte wiederholen.

Arbeitsblätter

Auf den folgenden Seiten sind alle Arbeitsblätter zu den oben genannten Materialien aufgeführt.

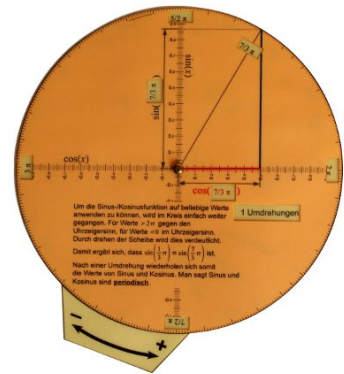
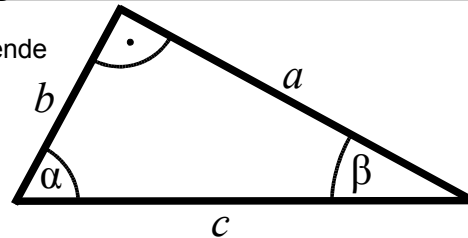


Abbildung 9: Schiebe Modell

Trigonometrie (*tan* und *cot*)

Eigenschaften von rechtwinkligen Dreiecken

Lösen Sie mit Hilfe des *Trigonators* folgende Aufgaben:



α	a	b	$\frac{a}{b}$
15°		9	,
15°		11	,
15°	4		,
35°	6		,
35°		10	,
35°	12		,

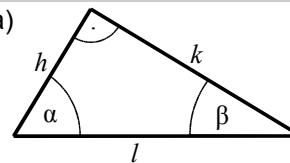
α	a	b	$\frac{b}{a}$
25°		18	,
25°		15	,
25°	5		,
20°		9,5	,
20°		13,5	,
20°	5,5		,

Tangensfunktion und Kotangensfunktion

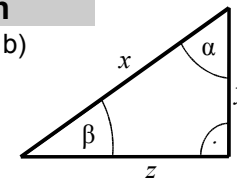
Definition:

tan und *cot* bestimmen

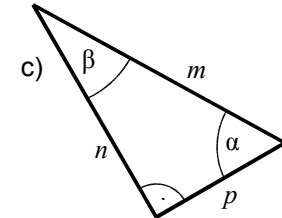
a)



b)



c)



$\tan \alpha =$

$\cot \alpha =$

$\tan \beta =$

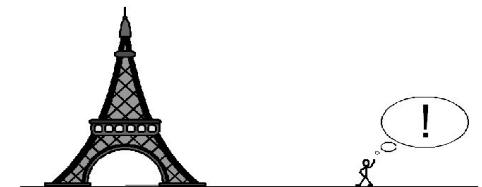
$\tan \alpha =$

$\cot \alpha =$

$\tan \beta =$

Wie hoch ist der Eiffelturm?

Berechnen Sie die Höhe des Eiffelturms mit Hilfe der Tangensfunktion.



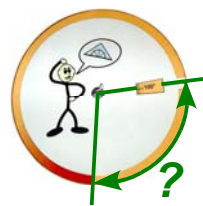
Arbeitsblatt zum Bogenmaß

Messen

Bestimmen Sie durch Messen die Länge der Kreisbögen zu den Kreissektoren mit folgenden Winkel. Geben Sie die Länge in **dm** an. **Messen Sie so genau wie möglich!**

- | | |
|---------|---------|
| A) 100° | G) 45° |
| B) 90° | H) 30° |
| C) 180° | I) 56° |
| D) 270° | J) 134° |
| E) 360° | K) 220° |
| F) 295° | L) 66° |

Beispiel: Gesucht ist die Länge des Bogens eines Kreissektors mit einem Winkel von 100°. Stellen Sie den „Bogenmaßsumrechner“ auf 100° ein und messen Sie die Länge des Kreisbogens.



Berechnen

Finden Sie eine Formel, mit der ein Grad-Wert in die Bogenlänge des zugehörigen Kreissektors umgerechnet werden kann¹:

Formel:

Für Kreise mit einem Radius $r = 1$ berechnet die obige Formel zu einem Winkel in Grad das zugehörige Bogenmaß. Vereinfachen Sie Ihre Formel für $r = 1$.

Bogenmaß-Formel:

Merke: Das Bogenmaß hat keine Maßeinheit.

Prüfen

Überprüfen Sie Ihre Messergebnisse mit Hilfe der Formel. Die Abweichung zwischen Messwert und Rechenwert soll kleiner als 0,05 sein (d.h. die Differenz der beiden Werte soll kleiner als 0,05 sein).

¹ Bei Bedarf gibt es (beim Lehrer) eine Karte mit einem Tipp.

Arbeitsblatt zu Sinus und Kosinus

Entscheiden Sie:



Folgende Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu lösen! Bestimmen Sie, ob die Werte $>$ oder < 0 sind:

A) $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)$

C) $\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)$

B) $\cos\left(\frac{5}{9}\pi\right)$

D) $\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)$

Tabelle einiger Sinus und Kosinus Werte

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\frac{7}{4}\pi$	-0,7071	0,7071	$\frac{7}{9}\pi$	0,6428	-0,7660
2,5	0,5985	-0,8011	0,75	0,6816	0,7317
$\frac{1}{6}\pi$	0,5000	0,8660	$\frac{29}{18}\pi$	-0,9397	0,3420

Aufgaben



Folgende Aufgaben sind ohne Taschenrechner zu lösen! Verwenden Sie die Werte aus der oben angegebenen Tabelle¹.

Berechnen Sie folgende Werte:

A) $\sin\left(\frac{1}{6}\pi + \pi\right)$

B) $\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)$

¹ $\pi \approx 3,1416$

Berechnung von Sinus und Kosinus

Anleitung Erstellen

Finden Sie heraus, wie mit dem *Trigonator II* die Aufgaben auf dem Arbeitsblatt gelöst werden können und Schreiben Sie eine Anleitung für den *Trigonator II*.

Aufgaben



Folgende Aufgaben sind ohne Taschenrechner und nur mit Hilfe des *Trigonator II* zu lösen.

Bestimmen Sie die Werte für x auf zwei Nachkommastellen und begründen Sie, warum die Lösungen für F), G), H) und L) nicht eindeutig sind.

A) $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = x$

F) $\sin(x) = 0,94$

B) $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = x$

G) $\sin(x) = -0,87$

H) $\sin(x) = 0,37$

C) $\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = x$

I) $\cos\left(\frac{7}{9}\pi\right) = x$

J) $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = x$

D) $\sin\left(\frac{17}{9}\pi\right) = x$

K) $\cos\left(\frac{25}{360} \cdot \pi\right) = x$

E) $\sin\left(\frac{17}{360} \cdot \pi\right) = x$

L) $\cos(x) = -0,5$

Überprüfen

Überprüfen Sie die mit Hilfe des Taschenrechners die ermittelten Werte. Bei Abweichungen von mehr als $\pm 0,01$, versuchen Sie bitte Nachzuvollziehen, wie diese zustande kamen.

Arbeitsblatt zur Periodizität

Periode

Die Schiebe-Tafel zeigt, dass

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{13}{3}\pi\right)$$

oder aber

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi + p\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi + 2p\right) = \dots \quad p \neq 0$$

Wie groß ist p ? $p =$ _____

Merke: p ist die Periode von $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

Berechnen

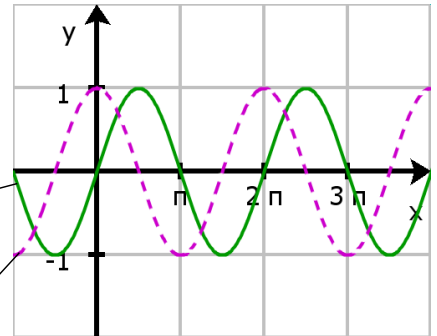
- A) Gesucht sind drei Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 0,5$.
- B) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $\sin(x) = 0$ für $-4 \leq x \leq 4$.
- C) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $\sin(x) = 0,87$ für $-1 \leq x \leq 3\pi$.
- D) Gesucht ist ein Wert für $\delta \neq 1$, so dass $\sin(3) = \sin(2 + \delta)$.
- E) Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $\cos(x) = -0,5$ für $-5 \leq x \leq 3$.
- F) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $\cos(x) = 0,6$?

Arbeitsblatt zu Schaubilder der Sinus- und Kosinusfunktionen

Bestimmen

In nebenstehendem Schaubild sind die Graphen der Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ dargestellt. Ordnen Sie die Kurven den entsprechenden Funktionen zu und Begründen Sie Ihre Zuordnung.

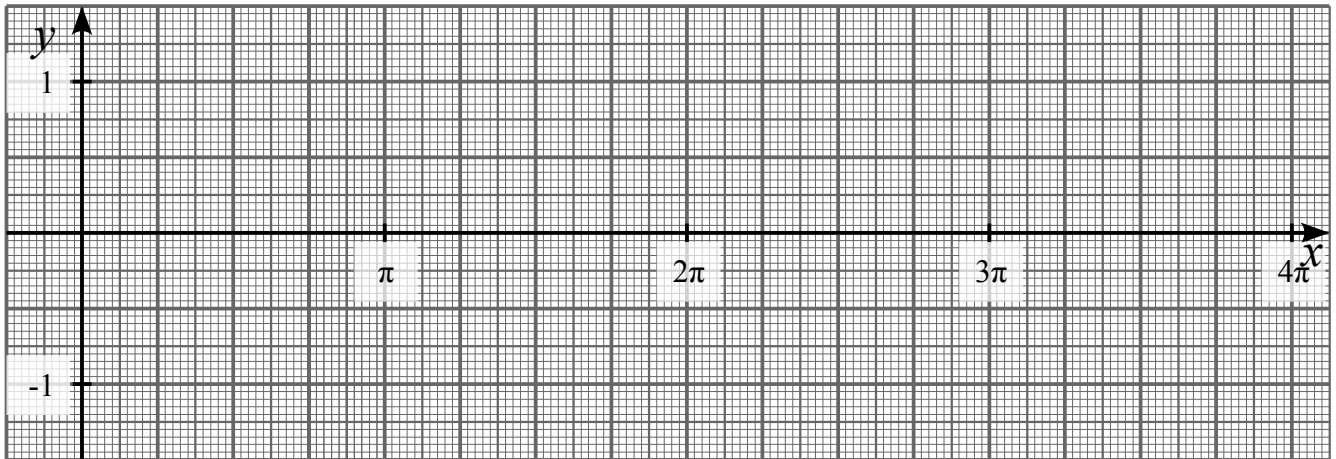
Begründung:



Zeichnen

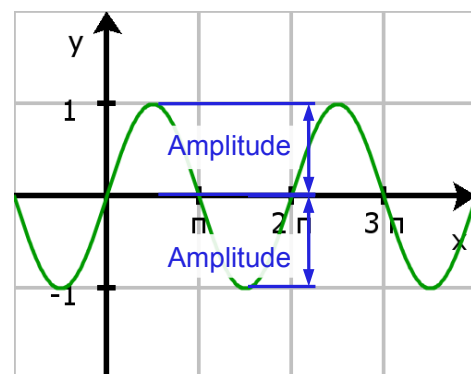
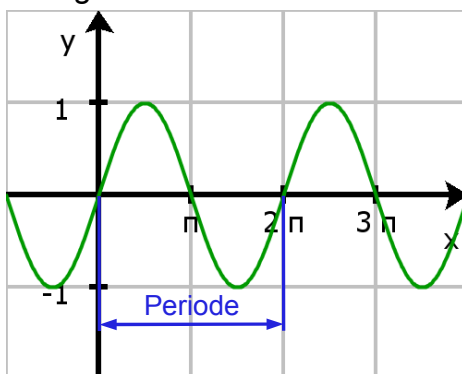
Zeichnen Sie in das Koordinatensystem die Graphen folgender Funktionen ein:

$$f_1(x) = \sin(x) + 0,5, \quad f_2(x) = \sin(2x), \quad f_3(x) = 0,5 \cdot \sin(x)$$



Verschieben, Strecken und Stauchen

Bezeichnungen:



Verbinden Sie durch Linien die Beschreibungen mit den dazugehörigen Funktionstermen. Finden Sie die richtige Zuordnung durch Analyse (z.B. der vorhergehenden Aufgaben) oder Experimente (z.B. mit dem *Trigonator II* oder Taschenrechner):

Verkürzen oder Verlängern der Periode

$$\sin(x) + b$$

Beispiel

$$\sin(x) + 0,5$$

senkrecht verschieben

$$\sin(kx)$$

$$\sin(2x)$$

Verkleinern oder Vergrößern der Amplitude

$$a \sin(x)$$

$$0,5 \cdot \sin(x)$$

Schaubilder Zuordnen



Ordnen Sie die Funktionsgleichungen den entsprechenden Schaubildern zu (ohne Hilfe eines Taschenrechners), in dem Sie die Funktionsgleichung unter das Schaubild schreiben:

Funktionsgleichungen:

A) $f(x) = \sin(x) - \frac{3}{4}$

B) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

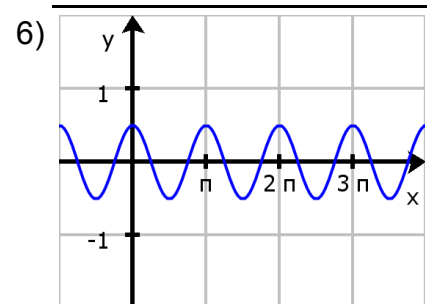
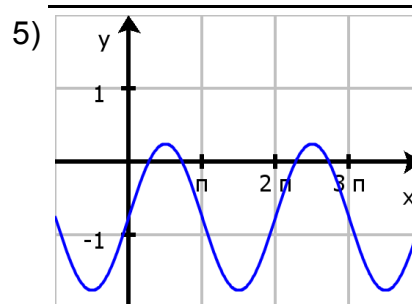
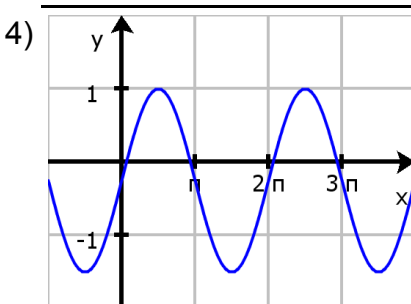
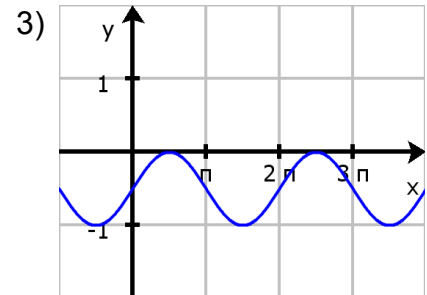
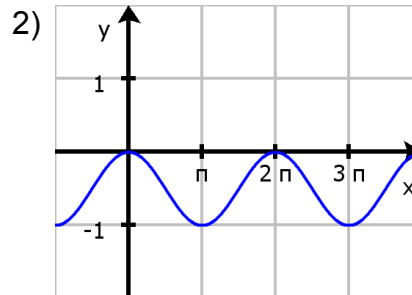
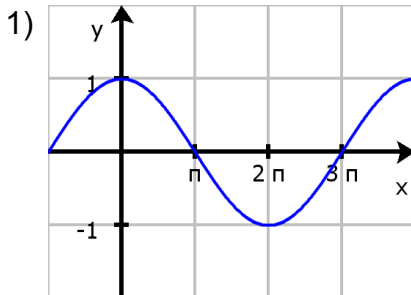
C) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$

D) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}$

E) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}$

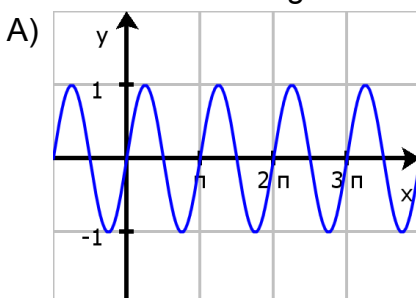
F) $f(x) = \frac{5}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}$

Schaubilder:

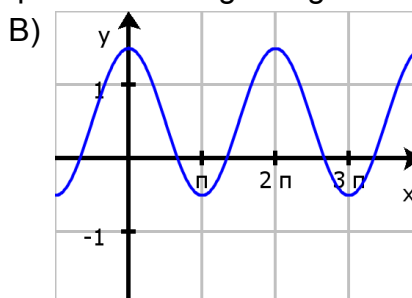


Funktionsgleichungen bestimmen

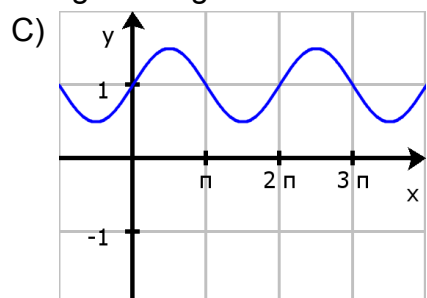
Bestimmen Sie zu folgenden Graphen die dazugehörigen Funktionsgleichungen:



$f(x) =$



$f(x) =$



$f(x) =$

Nullstellen bestimmen

Bestimmen Sie (am besten mit dem *Trigonator II*) die exakten Nullstellen der Graphen folgender Funktionen im Intervall $[0; 2\pi]$:

$f_1(x) = \sin(2x)$, $f_2(x) = 0,5 \cdot \cos(x) + 0,25$, $f_3(x) = \sin(x) - 2$