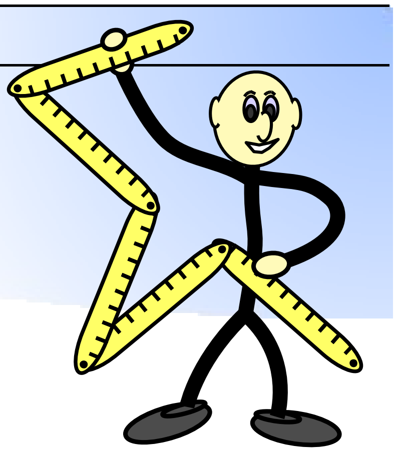
Kurvenverlauf



Um was geht es?

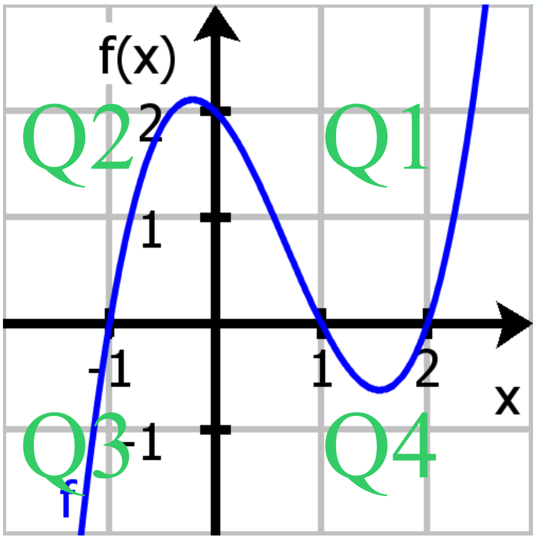
Betrachten wir das Schaubild einer ganzrationalen Funktion mit ungeradem Grad, z.B.:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Wertetabelle

x	$f(x)$
-1,5	-4,375
-1,0	0
-0,5	1,875
0	2,000
0,5	1,125
1,0	0
1,5	-0,625
2,0	0
2,5	2,625

Schaubild:



Das Koordinatensystem ist in 4 Quadraten eingeteilt (Q1-Q4).

Frage: Wie verhält sich die Kurve für „kleine" ($x \to -\infty$) und für „große" x-Werte ($x \to \infty$)?

Fall 1: $x \to -\infty$ („kleine" x-Werte): Setze z.B. für $x = -100$ ein:

$$f(-100) = (-100)^3 - 2 \cdot (-100)^2 + 100 + 2 = -1019898 \approx -1000000 = (-100)^3$$

für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \approx x^3$. Für $x < -100$ ist auch $f(x) \approx x^3 < 0$ und die Kurve verläuft im Quadrant Q3.

Fall 2: $x \to \infty$ („große" x-Werte): Setze z.B. für $x = 100$ ein:

$$f(100) = 100^3 - 2 \cdot 100^2 - 100 + 2 = 979902 \approx 1000000 = 100^3$$

für $x \to \infty$ gilt $f(x) \approx x^3$. Wenn $x > 100$ ist, ist auch $f(x) \approx x^3 > 0$ und die Kurve verläuft im Quadrant Q1.

Fazit: Die Kurve verläuft vom Quadrant Q3 nach Quadrant Q1.

Die Erkenntnisse gelten für alle ganzrationale Funktionen mit ungeradem Grad.

Merke

Sei f eine ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad n, dann gilt für hinreichend „kleine", bzw. „große" x-Werte: $f(x) \approx a x^n$.

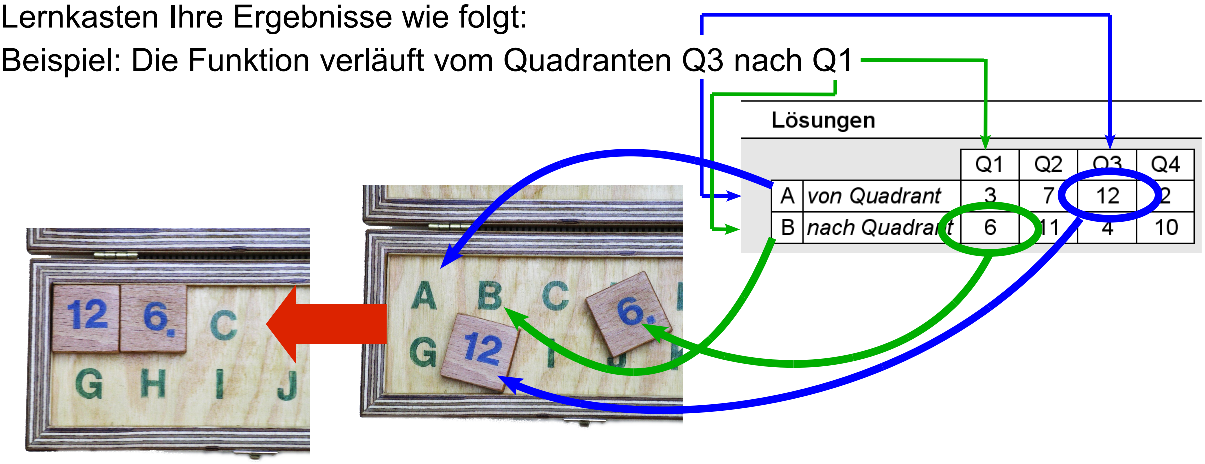
Es gilt: ($n \in \mathbb{N}^*$, n ist eine ungerade Zahl, $a \neq 0$)

- $a < 0$ und $x < 0$: $a x^n > 0$
- $a < 0$ und $x > 0$: $a x^n < 0$
- $a > 0$ und $x > 0$: $a x^n > 0$
- $a > 0$ und $x < 0$: $a x^n < 0$

Aufgaben

Zeichnen Sie die Kurven zu den unten gegebenen Funktionsgleichungen in ein Koordinatensystem[1] ein und bestimmen Sie den Verlauf der Kurve. Prüfen Sie mit dem Lernkasten Ihre Ergebnisse wie folgt:

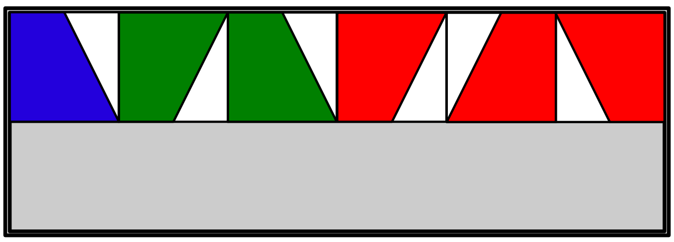
Beispiel: Die Funktion verläuft vom Quadranten Q3 nach Q1



Wenn Sie fertig sind, dann füllen Sie alle verbleibenden Felder mit den restlichen Steinen, so dass die Zahlen nach unten zeigen und klappen Sie den Kasten zu, drehen ihn um, klappen ihn wieder auf und vergleichen das Muster mit dem Lösungsmuster.

Funktionsgleichungen	Lösungen					
			Q1	Q2	Q3	Q4
$f(x)=-x^3+3x^2-x+1$	A	von Quadrant	10	5	7	9
	B	nach Quadrant	3	8	2	11
			Q1	Q2	Q3	Q4
$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x$	C	von Quadrant	5	11	6	8
	D	nach Quadrant	8	9	1	12
			Q1	Q2	Q3	Q4
$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+2x$	E	von Quadrant	4	2	11	7
	F	nach Quadrant	6	5	1	10

Lösungsmuster



Zusammenfassung

Halten Sie schriftlich fest (und vergleichen Sie mit den Lösungskarten):

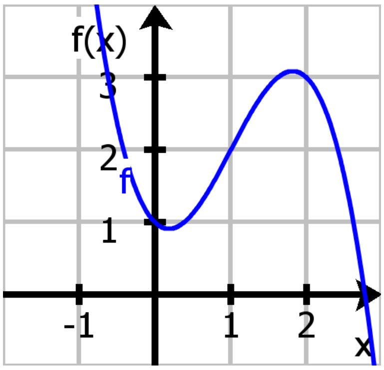
1. Wenn die Kurve für $x\to-\infty$ den Quadrant Q2 durchläuft. Welchen Quadrant durchläuft die Kurve für $x\to\infty$?
2. Wenn die Kurve für $x\to-\infty$ den Quadrant Q3 durchläuft. Welchen Quadrant durchläuft die Kurve für $x\to\infty$?
3. Wenn $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ ($n\in\mathbb{N}^*$, n ist ungerade, $a_n\neq 0$) die Funktionsgleichung ist, wo von hängt es ab, ob für $x\to-\infty$ der 2. oder 3. Quadrant durchlaufen wird? Geben Sie eine Regel an.

1 Hinweis: Verwenden Sie eine Wertetabelle.

Kurvenverlauf (Lösungen)

Kurve 1: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 1$

Schaubild:

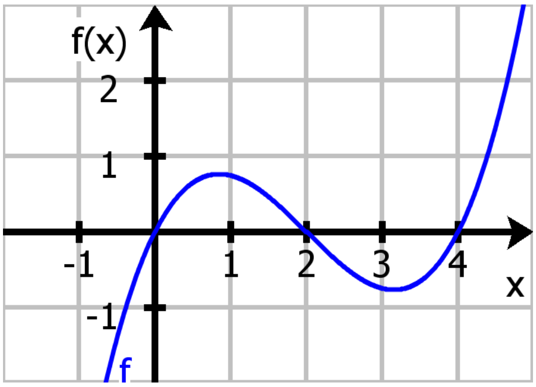


Für hinreichend „kleine“ und „große“ x-Werte gilt: $f(x) \approx -x^3$. Deshalb verläuft die Kurve für „kleine“ x-Werte im Quadrant Q2 und für „große“ x-Werte im Quadrant Q4.

Antwort: Die Kurve verläuft vom Quadrant Q2 nach Q4.

Kurve 2: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

Schaubild:

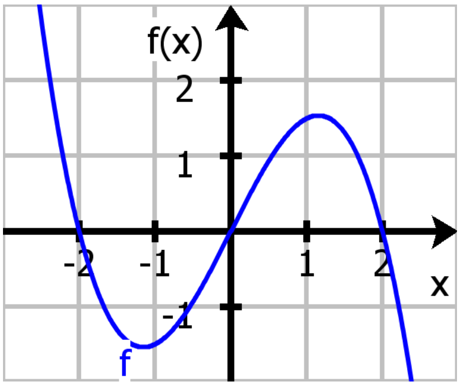


Für hinreichend „kleine“ und „große“ x-Werte gilt: $f(x) \approx \frac{1}{4}x^3$. Deshalb verläuft die Kurve für „kleine“ x-Werte im Quadrant Q3 und für „große“ x-Werte im Quadrant Q1.

Antwort: Die Kurve verläuft vom Quadrant Q3 nach Q1.

Kurve 3: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$

Schaubild:



Für hinreichend „kleine“ und „große“ x-Werte gilt: $f(x) \approx -\frac{1}{2}x^3$. Deshalb verläuft die Kurve für „kleine“ x-Werte im Quadrant Q2 und für „große“ x-Werte im Quadrant Q4.

Antwort: Die Kurve verläuft vom Quadrant Q2 nach Q4.

Zusammenfassung

Halten Sie schriftlich fest:

1. Wenn die Kurve für den Quadrant Q2 durchläuft. Welchen Quadrant durchläuft die Kurve für $x \rightarrow \infty$?

   Die Kurve durchläuft für $x \rightarrow \infty$ den Quadrant Q4.

2. Wenn die Kurve für $x \rightarrow -\infty$ den Quadrant Q3 durchläuft. Welchen Quadrant durchläuft die Kurve für $x \rightarrow \infty$?

   Die Kurve durchläuft für $x \rightarrow \infty$ den Quadrant Q1.

3. Wenn $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n ist ungerade, $a_n \neq 0$) die Funktionsgleichung ist, wo von hängt es ab, ob für $x \rightarrow -\infty$ der 2. oder 3. Quadrant durchlaufen wird? Geben Sie eine Regel an.

   Ist der Koeffizient a negativ, so läuft die Kurve vom Quadrant Q2 nach Q4. Ist der Koeffizient a positiv, so läuft die Kurve vom Quadrant Q3 nach Q1.