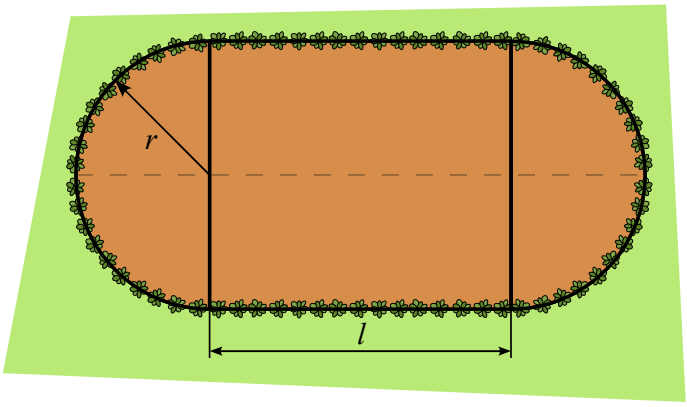
Optimieren

Beispiel: Blumenbeet

Sachverhalt

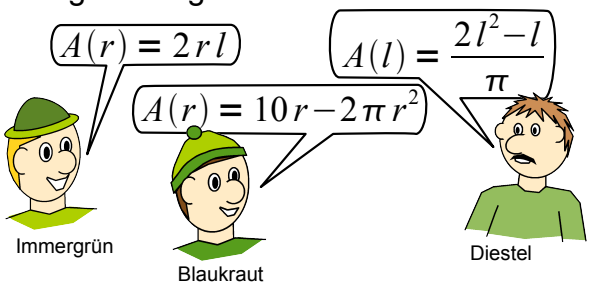
Im Stadtgarten sollen die Gärtner ein Blumenbeet mit nebenstehender Form anlegen. Zum Einfassen des Beets stehen ihnen kleine Buchsbaum-Pflanzen für 10 m zur Verfügung. Gesucht ist der Radius der äußeren Halbkreise, für den das Rechteck in der Mitte eine maximale Flächengröße erreicht.



Die Größe des Rechtecks wird durch den Term $A = 2rl$ beschrieben. Außerdem gilt folgende Nebenbedingung: $\underbrace{2l + 2\pi r}_{\text{Umfang des Beets}} = \underbrace{10}_{\text{Länge der Buchsbaum Pflanzung}}$.

Zielfunktion bestimmen

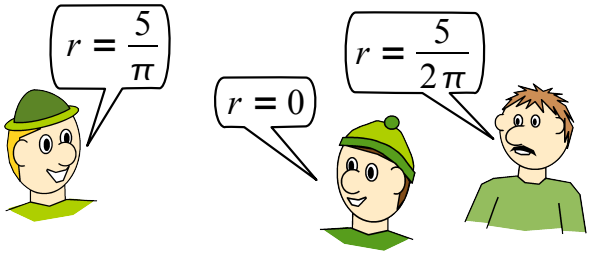
Um das Problem zu lösen suchen die Gärtner zunächst eine Zielfunktion, die die Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit vom Radius berechnet. Dazu verwenden sie den Term zur Flächenberechnung des Rechtecks und lassen die Nebenbedingung einfließen um die Funktionsgleichung nach einer Variable aufzulösen.



Finden Sie heraus, wer die richtige Funktionsgleichung gefunden hat.

(Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen auf der Lösungskarte 1)

Anschließend suchen die drei nach einem Radius, für den die Funktion einen maximalen Wert annimmt.



Finden Sie heraus, welche Ingenieure recht haben und begründen Sie schriftlich Ihre Aussage.

(Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen auf der Lösungskarte 2)

© 2009 Henrik Horstmann

Optimieren

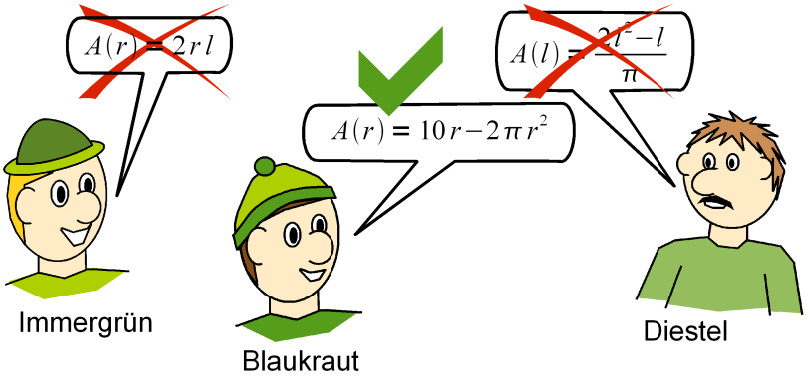
Beispiel: Blumenbeet

Lösungskarte 1

$A(r) = 2rl$ ist zwar eine Funktion, deren Parameter die gesuchte Größe ist. Allerdings hat sie noch zwei Variable.

$A(r) = 10r - 2\pi r^2$ ist die gesuchte Funktion. Zum einen hat sie als Parameter die gesuchte Größe und zum anderen ist sie nach der Variable r aufgelöst.

$A(l) = \frac{2l^2 - l}{\pi}$ ist zwar nach einer Variable aufgelöst, allerdings wird mit dieser Funktion die Länge untersucht und nicht der Radius. Dies ist prinzipiell auch möglich, jedoch umständlich, da letztlich der Radius aus der Länge errechnet werden muss.



 © 2009 Henrik Horstmann

Optimieren

Beispiel: Blumenbeet

Lösungskarte 2

Um den Radius zu finden, für den die Funktion einen maximalen Wert annimmt, muss die Funktion auf Hochpunkte untersucht werden:

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} A(r) &= -2\pi r^2 + 10r \\ A'(r) &= -4\pi r + 10 \\ A''(r) &= -4\pi \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $A'(r) = 0$:

$$\begin{aligned} -4\pi r + 10 &= 0 \quad \Big| -10 \\ -4\pi r &= -10 \quad \Big| \div(-4\pi) \\ r &= \frac{5}{2\pi} \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $r = \frac{5}{2\pi}$:

$$A''\left(\frac{5}{2\pi}\right) = -4\pi$$

$A''\left(\frac{5}{2\pi}\right) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle

$$r = \frac{5}{2\pi}$$

für $r = \frac{5}{2\pi}$ ist die Rechteckfläche in der Mitte am größten.

 © 2009 Henrik Horstmann