Exponentialgleichungen

Gleichungstyp 1:

$$-4\,e^{-4x}+\frac{2}{3}=0$$

Lösen durch Anwenden der Definition des Logarithmus:

$$\begin{aligned}
-4\,e^{-4x}+\frac{2}{3} &= 0 && \Big|\, -\frac{2}{3} \\
-4\,e^{-4x} &= -\frac{2}{3} && \Big|\, \div(-4) \\
e^{-4x} &= \frac{1}{6} && \Big|\, \ln \\
-4x &= \ln\left(\frac{1}{6}\right) && \Big|\div(-4) \\
x &= \frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{-4} \\
x &\approx 0.4479
\end{aligned}$$

$$L = \left\{\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{-4}\right\} \quad \left(=\{0.4479\}\right)$$

Gleichungstyp 2:

$$-\frac{5}{3}x^2e^{4x+2}+5xe^{4x+2}=0$$

Lösen durch Ausklammern:

Löse nach x auf:

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3}x^2e^{4x+2}+5xe^{4x+2} &= 0 \quad \Big| \; e^{4x+2} \text{ ausklammern} \\ e^{4x+2}\left(-\frac{5}{3}x^2+5x\right) &= 0 \end{aligned}$$

$e^{4x+2}>0$ für alle $x \Rightarrow -\frac{5}{3}x^2+5x=0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3}x^2+5x &= 0 \quad \Big| \; x \text{ ausklammern} \\ x\left(-\frac{5}{3}x+5\right) &= 0 \end{aligned}$$

$x=0$ oder $-\frac{5}{3}x+5=0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$x_1 = 0$$

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3}x+5 &= 0 \quad \Big| -5 \\ -\frac{5}{3}x &= -5 \quad \Big| \div\left(-\frac{5}{3}\right) \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$L=\{3, 0\}$

$4x^5 e^{-3x-3} - 3x^5 = 0$

Lösen durch Ausklammern:

Löse nach x auf:

$$\begin{aligned} 4x^5 e^{-3x-3} - 3x^5 &= 0 \quad \Big|\ x^5 \text{ ausklammern} \\ x^5\left(4e^{-3x-3} - 3\right) &= 0 \end{aligned}$$

$x^5 = 0$ oder $4e^{-3x-3} - 3 = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$\begin{aligned} x^5 &= 0 \quad \Big|\ \sqrt[5]{} \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4e^{-3x-3} - 3 &= 0 && \Big|\ +3 \\ 4e^{-3x-3} &= 3 && \Big|\ \div 4 \\ e^{-3x-3} &= \frac{3}{4} && \Big|\ \ln \\ -3x - 3 &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) && \Big|+3 \\ -3x &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 3 && \Big|\div(-3) \\ x &= -\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right) + 3}{3} \\ x &\approx -0{,}9041 \end{aligned}$$

$$x_2 = -\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right) + 3}{3}$$

$$L = \left\{0, -\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right) + 3}{3}\right\}$$

Gleichungstyp 3:

$$-\frac{9}{2}e^{-6x}+\frac{9}{4}e^{-3x}+\frac{27}{4}=0$$

Lösen mit Hilfe von Substitution:

Löse nach x auf:

$$\begin{aligned}
-\frac{9}{2}e^{-6x}+\frac{9}{4}e^{-3x}+\frac{27}{4} &= 0\\
-\frac{9}{2}e^{2(-3x)}+\frac{9}{4}e^{-3x}+\frac{27}{4} &= 0\\
-\frac{9}{2}\left(e^{(-3x)}\right)^2+\frac{9}{4}e^{-3x}+\frac{27}{4} &= 0 \quad \Big|\ \text{Substituton: } e^{-3x} \rightarrow u\\
-\frac{9}{2}u^2+\frac{9}{4}u+\frac{27}{4} &= 0
\end{aligned}$$

mit $a=-\frac{9}{2}$, $b=\frac{9}{4}$ und $c=\frac{27}{4}$ in die Mitternachtsformel einsetzen:

$$u_{1,2} = \frac{-\frac{9}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\frac{27}{4}}}{2\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)}$$

$$u_{1,2} = \frac{-\frac{9}{4}\pm\frac{45}{4}}{-9}$$

$$u_1 = -1$$

$$u_2 = \frac{3}{2}$$

Rücksubstituton: $u \rightarrow e^{-3x}$

u_1: $e^{-3x} = -1$

hat keine Lösung

u_2: $e^{-3x} = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
e^{-3x} &= \frac{3}{2} && \Big|\ 0\\
e^{-3x} &= \frac{3}{2} && \Big|\ \ln\\
-3x &= \ln\left(\frac{3}{2}\right) && \Big|\div(-3)\\
x &= \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{-3}\\
x &\approx -0.1352
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{-3} \qquad L = \left\{\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{-3}\right\}$$

$$-\frac{9}{2}e^{-3x}-\frac{9}{2}e^{3x}+9=0$$

Lösen mit Hilfe von Substitution: (Bei diesem Beispiel ist nicht sofort offensichtlich welcher Term substituiert werden soll!)

Löse nach x auf:

$$\begin{aligned}
-\frac{9}{2}e^{-3x}-\frac{9}{2}e^{3x}+9 &= 0 \quad \left|\ \cdot e^{-3x}\right. \\
-\frac{9}{2}e^{-6x}+9e^{-3x}-\frac{9}{2} &= 0 \\
-\frac{9}{2}e^{2(-3x)}+9e^{-3x}-\frac{9}{2} &= 0 \\
-\frac{9}{2}\left(e^{(-3x)}\right)^2+9e^{-3x}-\frac{9}{2} &= 0 \quad \left|\ \text{Substituton: } e^{-3x} \rightarrow u\right. \\
-\frac{9}{2}u^2+9u-\frac{9}{2} &= 0 \quad \left|\ \cdot 2\right. \\
-9u^2+18u-9 &= 0
\end{aligned}$$

Durch die Multiplikation wird die Gleichung so umgeformt, dass eine Substitution möglich ist!

mit $a=-9$, $b=18$ und $c=-9$ in die Lösungsformel einsetzen:

$$u_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{18^2-4\cdot(-9)\cdot(-9)}}{2\cdot(-9)}$$

$$\begin{aligned}
u_{1,2} &= \frac{-18\pm 0}{-18} \\
u_1 &= 1 \\
u_2 &= 1
\end{aligned}$$

Rücksubstituton: $u \rightarrow e^{-3x}$

$u_{1,2}$: $e^{-3x}=1$

$$\begin{aligned}
e^{-3x} &= 1 \quad \left|\ \ln\right. \\
-3x &= \ln(1) \quad \left|\ \div(-3)\right. \\
x &= \frac{\ln(1)}{-3} \\
x &= 0
\end{aligned}$$

$x_{1,2}=0$

$$L=\{0\}$$

