Volumen und Oberfläche zusammengesetzter Körper

Unterrichtsplanung

Dauer: 90 oder 180 Minuten
Material: Kiste mit Grundkörper (Bauklötze aus Holz)
Lineal
Stift und Papier

Voraussetzungen: Die Lernenden verfügen über das Wissen, Volumina und Oberflächeninhalte der zur Verfügung stehenden Grundkörper zu berechnen.

Die Lernenden (einzeln, Teams) erhalten jeweils ein Konvolut von Grundkörper. Dies können zum Beispiel Quader, Prismen und Halbzylinder sein:

Aus diesen Teilkörper wird nach belieben ein neuer Körper gebaut. Dieser neue Körper muss aus mindestens zwei Teilkörper bestehen, damit ein zusammengesetzter Körper entsteht. Der Arbeitsauftrag besteht darin:

- bauen Sie aus mindestens zwei Bauklötzen einen neuen Körper
- fertigen Sie eine Zeichnung (Schrägbild) des neuen (zusammengesetzten) Körpers an
- Berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt des zusammengesetzten Körpers und halte Sie schriftlich Ihren Lösungsweg fest

Um die Berechnung durchführen zu können, werden mit dem Lineal Messungen an den zusammengesetzten Körper durchgeführt.

Während die Lernenden den Arbeitsauftrag ausführen, unterstützt die Lehrperson bei der Überwindung möglicher Hürden, auf die einzelnen Lernende stoßen.

Je nach Zeitbedarf der einzelnen Lernenden können diese weitere zusammengesetzte Körper kreieren und entsprechende Berechnungen ausführen. Dabei sollte sich die Lernenden selbst herausfordern und die Komplexität der zusammengesetzten Körper sukzessive erhöhen.

Zum Ende des Unterrichts, kann gegebenenfalls noch ein Austausch im Plenum stattfinden. Dabei können verschieden zusammengesetzte Körper und Vorgehensweisen zur Lösung der Aufgabenstellung vorgestellt aber auch verschieden Lösungsansätze für gleiche zusammengesetzte Körper diskutiert werden. Insbesondere letzteres führt nochmals zur kognitiven Auseinandersetzung mit dem eigenen Vorgehen.

Variationen

- es werden zusammengesetzte Körper vorgegeben
  Ziel: Vergleich verschiedener Vorgehensweisen
- Vorgabe eines zusammengesetzten Körpers, allerdings erhalten Gruppen von Lernenden den Körper in verschiedenen Positionen (auf verschiedenen Seiten liegend, stehend). Dadurch werden unterschiedliche Vorgehensweisen bei der Lösung provoziert
  Ziel: Vergleich verschiedener Vorgehensweisen
- Forderungen nach einer Mindestkomplexität (z.B. der zusammengesetzte Körper muss aus mindestens 4 Grundkörper bestehen / mindestens ein Grundkörper muss ein Prisma oder Halbzylinder sein
  Ziel: eine Mindestherausforderung zu garantieren, bei Lernenden, die sich nicht selbst herausfordern können
- es werden bestimmte Maße der Grundkörper vorgegeben
  Ziel: die Modelle der Körper dienen lediglich der Unterstützung des räumlichen Vorstellungsvermögens, die Übertragung der Maße erfolgt kognitiv. Gegebenenfalls müssen fehlende Maße aus den vorhandenen Maßen berechnet werden (z.B. bei einem Prisma mit einem rechtwinkligem, gleichschenkligen Dreieck als Grundseite, bei dem nur die Länge eines Schenkels gegeben ist. Hier muss gegebenenfalls die Länge der Grundseite berechnet werden)

Didaktische Anmerkungen

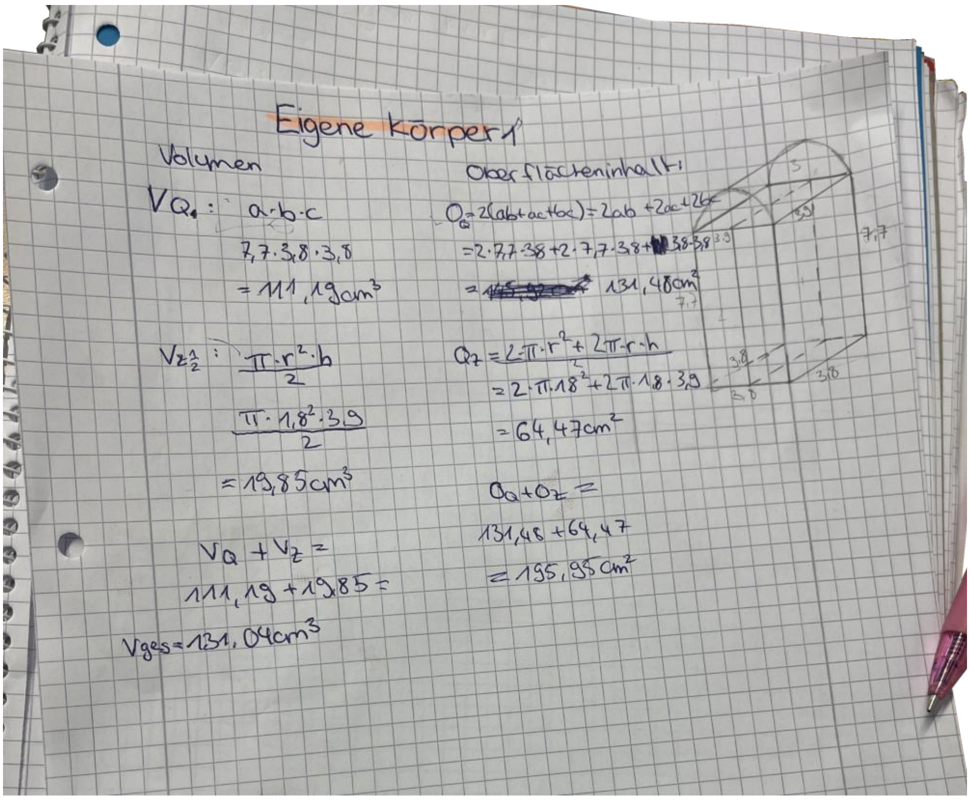
- der Unterricht folgt einer handlungsorientierten Vorgehensweise:
  - Es besteht Entscheidungsfreiheit bezüglich des Körpers, mit dem sich die Lernenden auseinander setzten wollen und Lernenden müssen Entscheidungen auf dem Lösungsweg treffen.
  - Im Hinblick auf die Ganzheitlichkeit werden verschiedene Sinne angesprochen. Beim zusammensetzten und gegebenenfalls schrittweise wieder auseinandernehmen des Körpers wird durch die haptische Tätigkeit der Tastsinn angesprochen. Durch das Modell wird die Problemstellung aber auch visuell erfasst.
  - Durch die Interaktion in der Lerngruppe können Fehlvorstellungen behoben werden.
- der Unterricht ist selbstdifferenzierend im Hinblick auf den Schwierigkeitsgrad, da die Lernenden die Komplexität des zusammengesetzten Körpers selbst bestimmen können
- die Komplexität der Problemstellung kann insbesondere dadurch erheblich gesteigert werden, wenn gefordert wird, Das ein Teil der Teilkörper nicht flächendeckend aneinander gefügt werden.

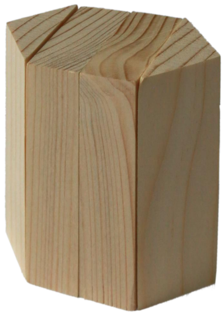
Insbesondere, wenn Längen nicht gemessen werden sollen (siehe letzte Variation im vorhergehenden Abschnitt) wird die kognitive Auseinandersetzung mit der Problemstellung erheblich gesteigert. Außerdem bietet die daraus entstehende Lösungsvielfalt ein großes Potential für Diskussionen mit mathematischen Fachinhalten.

- Beim Volumen lässt sich feststellen, dass es, im Gegensatz zum Oberflächeninhalt, immer als Summe der Volumina der Grundkörper berechnen werden kann. Diese Tatsache und der Unterschied zum Oberflächeninhalt sollte in dem Unterricht thematisiert werden. Dabei kann auch der Einfluss einer (Teil-)Verschmelzung von Grundkörper auf das Gesamtvolumen diskutiert werden.

Lernprodukte

Im folgenden werden verschiedene Lernprodukte aus dem Unterricht gezeigt. Der Stand der Lernprodukte entspricht dem, bevor das erste formative Feedback erfolgt, somit können die Lernprodukte noch Fehler haben.





$V_{dreieckprisma} = G \cdot h \cdot 2$

$h_{dreieckprisma} = 8cm \quad a = 2{,}5cm \quad h_a = 2{,}5cm \quad G = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{2{,}5cm \cdot 2{,}5cm}{2} = 3{,}125cm^2$

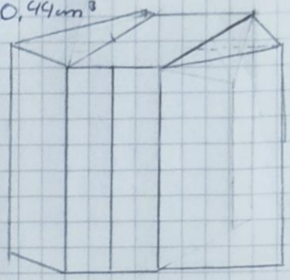
$V_{dreieckprisma} = G \cdot h = 3{,}125cm^2 \cdot 8cm$

$V = 25cm^3 \cdot 2 = 50cm^3$

$V_{rechteckprisma} = G \cdot h \cdot 2$

$a = 1{,}7cm \quad b = 3.8cm \quad h = 7{,}5cm \quad G = a \cdot b = 1{,}7cm \cdot 3.8cm = 6{,}46cm^2$

$V = G \cdot h = 6{,}46cm^2 \cdot 7cm = 45{,}22cm^3 \cdot 2 = 90{,}44cm^3$



$V_{gesamt} = V_{dreieck} + V_{rechteck}$

$V_{gesamt} = 50cm^3 + 90{,}44cm^3$

$V_{gesamt} = 140{,}44cm^3$

$O_{dreieckprisma} = (2 \cdot G) + (U \cdot h)$

$a^2 + b^2 = c^2 = 2{,}5cm^2 + 2{,}5cm^2 = 12{,}5cm^2$

$\sqrt{12{,}5} = 3{,}5cm^2 \quad c = 3{,}5cm^2$

$U = a + b + c = 2{,}5cm + 2{,}5cm + 3{,}5cm$

$U = 8{,}5cm$

$O = (2 \cdot G) + (U \cdot h) = (2 \cdot 3{,}125cm^2) + (8{,}5cm \cdot 8cm)$

$O = 74{,}25cm^2 - A \qquad A = \cancel{(G \cdot h) + (3 \cdot A_{dreieck})}$

$O = 74{,}25cm^2 - 15{,}625cm^2 \qquad A = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot a \cdot h = \frac{2{,}5cm^2}{2} + 2 \cdot 2{,}5cm \cdot 2{,}5cm$

$O = 58{,}625 \qquad A = 15{,}625cm^2$

$O_{Rechteck} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot h + b \cdot h)$

$O_{Rechteck} = 2 \cdot (1{,}7cm \cdot 3{,}8cm + 1{,}7cm \cdot 7{,}5cm + 3{,}8cm \cdot 7{,}5$

$O_{Rechteck} = 95{,}42cm + 95{,}42 - (2 \cdot A) \qquad A_{Rechteckprisma} = a \cdot b \cdot h$

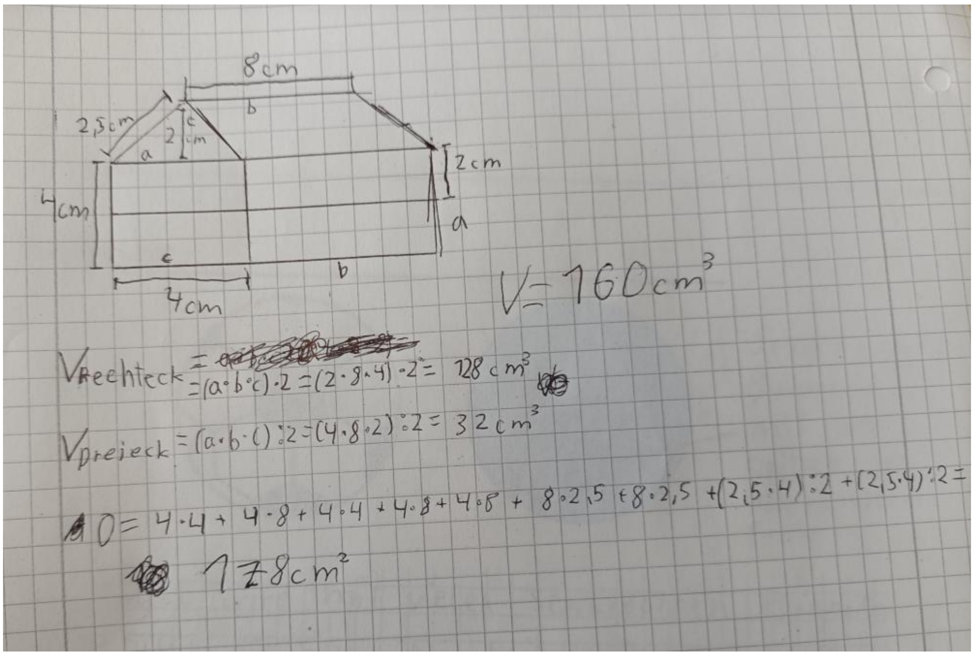
$O_{Rechteck} = 95{,}42cm + 95{,}42 - (2 \cdot 48{,}45cm^2) \qquad A_{Rechteckprisma} = 1{,}7cm \cdot 3{,}8cm \cdot 7{,}5$

$O_{Rechteck} = 93{,}94cm^2 \qquad A_{Rechteckprisma} = 48{,}45cm^2$

$O_{gesamt} = (O_{dreieck} \cdot 2) + (O_{rechteck} \cdot 2)$

$O_{gesamt} = (58{,}625cm^2 \cdot 2) + (93{,}42cm^2 \cdot 2)$

$O_{gesamt} = 304{,}09cm^2$



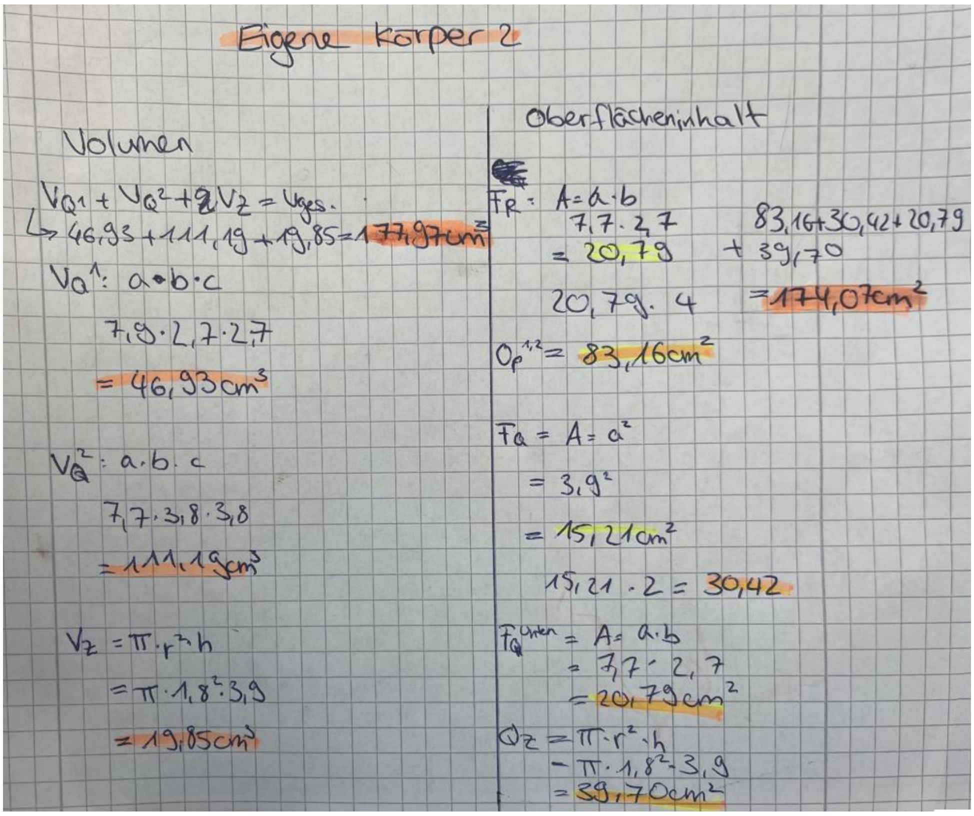
$V = 160 cm^3$

$V_{Rechteck} = (a \cdot b \cdot c) \cdot 2 = (2 \cdot 8 \cdot 4) \cdot 2 = 128 cm^3$

$V_{Dreieck} = (a \cdot b \cdot c) : 2 = (4 \cdot 8 \cdot 2) : 2 = 32 cm^3$

$O = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 8 \cdot 2{,}5 + 8 \cdot 2{,}5 + (2{,}5 \cdot 4) : 2 + (2{,}5 \cdot 4) : 2 =$

$178 cm^2$



Eigene Körper 2

Volumen

$V_{Q1} + V_{Q2} + V_Z = V_{ges.}$

$\to 46{,}93 + 111{,}19 + 19{,}85 = 177{,}97 cm^3$

$V_{Q1}: a \cdot b \cdot c$

$7{,}9 \cdot 2{,}7 \cdot 2{,}7$

$= 46{,}93 cm^3$

$V_{Q2}: a \cdot b \cdot c$

$7{,}7 \cdot 3{,}8 \cdot 3{,}8$

$= 111{,}19 cm^3$

$V_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$= \pi \cdot 1{,}8^2 \cdot 3{,}9$

$= 19{,}85 cm^3$

Oberflächeninhalt

$F_R: A = a \cdot b$

$7{,}7 \cdot 2{,}7$

$= 20{,}79$

$20{,}79 \cdot 4$

$O_P^{1,2} = 83{,}16 cm^2$

$F_Q = A = a^2$

$= 3{,}9^2$

$= 15{,}21 cm^2$

$15{,}21 \cdot 2 = 30{,}42$

$F_Q^{unten} = A = a \cdot b$

$= 7{,}7 \cdot 2{,}7$

$= 20{,}79 cm^2$

$O_Z = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$= \pi \cdot 1{,}8^2 \cdot 3{,}9$

$= 39{,}70 cm^2$

$83{,}16 + 30{,}42 + 20{,}79$

$+ 39{,}70$

$= 174{,}07 cm^2$