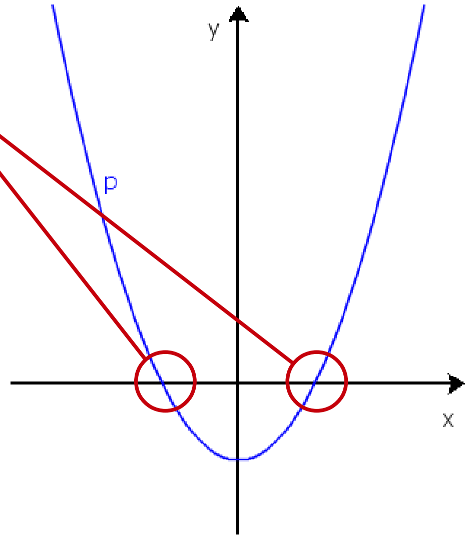
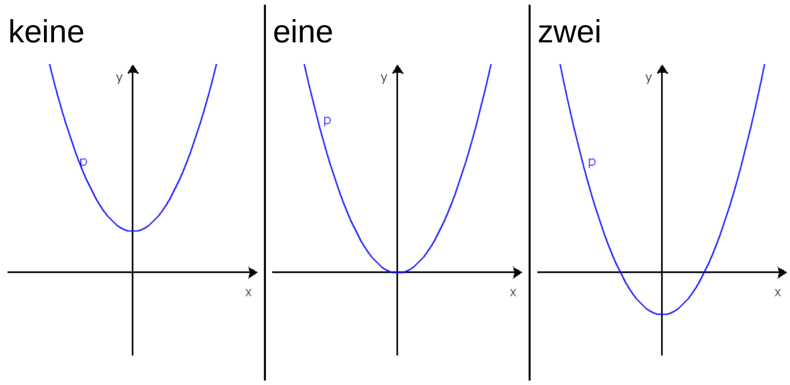
Nullstellen



Schnittpunkte mit der x-Achse ⇒ y-Koordinate ist Null
$y=0$.

Es kann



Nullstellen geben.

Fall $y = ax^2 + c$

Beispiel 1: p: $y=4x^2-36$

Setze für $y=0$ ein:

$$\begin{array}{rcll} 4x^2-36 & = & 0 & \mid +36 \\ 4x^2 & = & 36 & \mid \div 4 \\ x^2 & = & 9 & \mid \sqrt{} \\ x & = & \pm\sqrt{9} & \end{array}$$

$x=-3 \lor x=3$

$\Rightarrow N_1=(-3|0) \land N_2=(3|0)$

Beispiel 2: p: $y=2x^2+8$

Setze für $y=0$ ein:

$$\begin{array}{rcll} 2x^2+8 & = & 0 & \mid -8 \\ 2x^2 & = & -8 & \mid \div 2 \\ x^2 & = & -4 & \mid \sqrt{} \end{array}$$

↯ keine Lösung

⇒ die Parabel hat keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

Fall $y = a(x-b)^2 + c$

Beispiel 1: $p\colon\ y=(x-1)^2-4$

Setze für $y=0$ ein:

$$\begin{aligned} (x-1)^2-4 &= 0 && \mid +4 \\ (x-1)^2 &= 4 && \mid \sqrt{\ } \\ x-1 &= \mp 2 && \mid +1 \\ x &= 1\mp 2 \end{aligned}$$

$x=-1 \lor x=3$

$\Rightarrow N_1=(-1|0) \land N_2=(3|0)$

Beispiel 2: $p\colon\ y=-2(x+1)^2+18$

Setze für $y=0$ ein:

$$\begin{aligned} -2(x+1)^2+18 &= 0 && \mid -18 \\ -2(x+1)^2 &= -18 && \mid \div(-2) \\ (x+1)^2 &= 9 && \mid \sqrt{\ } \\ x+1 &= \mp 3 && \mid -1 \\ x &= -1\mp 3 \end{aligned}$$

$x=-4 \lor x=2$

$\Rightarrow N_1=(-4|0) \land N_2=(2|0)$

Darstellungswechsel

Normalform: $y=ax^2+bx+c$

Beispiel: $y=\underbrace{3}_{a}x^2\underbrace{-6}_{b}x\underbrace{+5}_{c}$

Scheitelform: $y=a(x-x_S)^2+y_S$

Beispiel: $y=\underbrace{3}_{a}(x-\underbrace{1}_{x_S})^2\underbrace{+2}_{y_S}$ $\quad S=(x_S|y_S)$ Scheitelpunkt

Scheitelform → Normalform:

Beispiel:

$$\begin{aligned} y&=3\,(x-1)^2+2 \\ &=3\,(x^2-2x+1)+2 \\ &=3x^2-6x+3+2 \\ &=3x^2-6x+5 \end{aligned}$$

Formal:

$$\begin{aligned} y&=a\,(x-x_S)^2+y_S && \text{| 2. Binomische Formel} \\ &=a\,(x^2-2x_Sx+x_S^2)+y_S && \text{| Klammer auflösen} \\ &=ax^2\underbrace{-2ax_S}_{=b}x+\underbrace{ax_S^2\,y_S}_{=c} && \text{| Zusammenfassen} \\ &=ax^2\underbrace{-2ax_S}_{=b}x+\underbrace{ax_S^2\,y_S}_{=c} \end{aligned}$$

Normalform → Scheitelform:

$y=ax^2+bx+c \rightarrow y=a(x-x_S)^2+y_S$

a kann direkt aus der Gleichung abgelesen werden: $a=a$.

Berechnung von x_S :

$$\begin{aligned} -2ax_S &= b && \mid \div(-2) \\ ax_S &= -\frac{b}{2} && \mid \div a \\ x_S &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Berechnung von y_S :

$$\begin{aligned} ax_S^{\,2}+y_S &= c && \mid -ax_S^{\,2} \\ y_S &= c-ax_S^{\,2} && \mid x_S \rightarrow -\frac{b}{2a} \\ y_S &= c-a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 && \mid \text{Potenzgesetz} \\ y_S &= c-a\cdot\frac{b^2}{4a^2} && \mid \text{Kürzen} \\ y_S &= c-\frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

$$y=ax^2+bx+c=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

Nullstellen:

Setze für $y=0$ ein:

$$\begin{aligned} a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2+c-\frac{b^2}{4a} &= 0 && \mid \text{Klammer auflösen} \\ a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2+c-\frac{b^2}{4a} &= 0 && \mid +\frac{b^2}{4a} \\ a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2+c &= \frac{b^2}{4a} && \mid -c \\ a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2 &= \frac{b^2}{4a}-c && \mid \text{Erweitern} \\ a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2 &= \frac{b^2}{4a}-\frac{4ac}{4a} && \mid \text{Zusammenfassen} \\ a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a} && \mid \div a \\ \left[x+\frac{b}{2a}\right]^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} && \mid \sqrt{} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x+\frac{b}{2a} &= \mp\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} && \mid \text{Potenzgesetz}\\
x+\frac{b}{2a} &= \mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} && \left|-\frac{b}{2a}\right.\\
x &= -\frac{b}{2a}\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \mid \text{Zusammenfassen}\\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Lösungsformel:

$$\boxed{x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{4a}}$$

Beispiel 1: $p:\ y=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{7}{2}$

Nullstellen berechnen ⇒ setze für $y=0$ ein

⇒ $\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{7}{2}=0$

Multipliziere mit dem Hauptnenner 2 um die Brüche zu eliminieren:

$x^2+6x-7=0$

$a=1$; $b=6$; $c=-7$ in die Lösungsformel einsetzen:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-6\mp\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot(-7)}}{2\cdot 1}\\
&= \frac{-6\mp\sqrt{36+28}}{2}\\
&= \frac{-6\mp\sqrt{64}}{2}\\
&= \frac{-6\mp 8}{2}
\end{aligned}
$$

$x=-7 \ \vee\ x=1$

Beispiel 2: $p:\ y=-x^2-3x+10$

Nullstellen berechnen ⇒ setze für $y=0$ ein

⇒ $-x^2-3x+10=0$

$a=-1$; $b=-3$; $c=10$ in die Lösungsformel einsetzen:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-(-3)\mp\sqrt{(-3)^2-4\cdot(-1)\cdot 10}}{2\cdot(-1)}\\
&= \frac{3\mp\sqrt{9+40}}{-2}\\
&= \frac{3\mp\sqrt{49}}{-2}\\
&= \frac{3\mp 7}{-2}
\end{aligned}
$$

$x=-5 \ \vee\ x=2$