Aufgaben zur Produktdarstellung [1]

Linearfaktorzerlegung

Zerlegen Sie die Funktionsterme in Linearfaktoren: $x \in \mathbb{R}$

Beispiel: $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 12x = 2x(x-2)(x+3)$

Linearfaktoren

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

b) $f(x) = 2x^2 + 12x + 18$

c) $f(x) = (3x^2 - 24x + 48)(2x^2 - 18)$

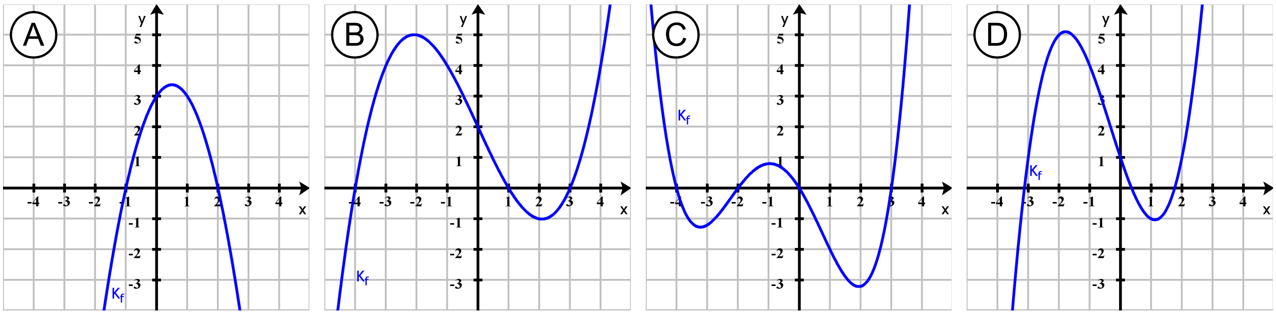
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$

e) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{3}x$

f) $f(x) = \frac{2}{5}x^4 - 4x^2 + 10$

Funktionsgleichungen aufstellen

Finden Sie zu jedem der Schaubilder einen passenden Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion.



Parameter bestimmen

Bestimmen Sie in den folgenden Gleichungen die Werte für $a, b \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(x+a)^2$

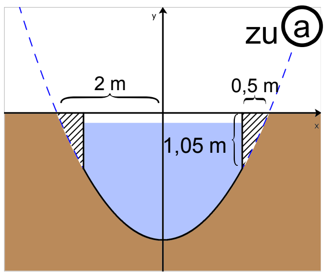
b) $2x^2 - 6x - 36 = 2(x-6)(x-a)$

c) $x^3 + x^2 - 6x = x(x+a)(x+3)$

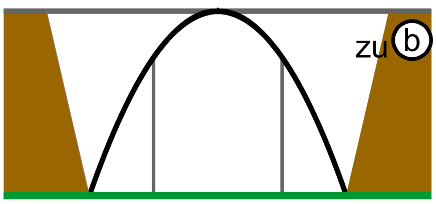
d) $\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x-a)(x+b)$

Modellieren

a) Wie tief ist der Kanal?



b) Bestimmen Sie die Höhe des Brückenbogens in der Mitte der Brücke, wenn der Brückenbogen durch eine Parabel beschrieben wird. Das Tal misst eine Breite von 60 m. Die Pfeiler stehen in einem Abstand von 30 m und haben eine Höhe von 30 m.



Lösungsvorschläge

Linearfaktorzerlegung

a)

$$f(x)=x^2-6x+9 \underset{\substack{\text{2. binomische}\\ \text{Formel}}}{=} (x-3)^2$$

b)

$$f(x)=2x^2+12x+18=2\left(x^2+6x+9\right) \underset{\substack{\text{1. binomische}\\ \text{Formel}}}{=} 2(x+3)^2$$

c)

$$f(x)=\left(3x^2-24x+48\right)\left(2x^2-18\right)=6\left(x^2-8x+16\right)\left(x^2-9\right) \underset{\substack{\text{2. und 3.}\\ \text{binomische}\\ \text{Formel}}}{=} 6(x-4)^2(x-3)(x+3)$$

d)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$$

Nullstellen bestimmen: Setze $f(x)=0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3 &= 0 \quad | \cdot 2 \\ x^2-x-6 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=1,\ b=-1,\ c=-6$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} \\ &= \frac{1\pm\sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{1\pm 5}{2} \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$$

e)

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+\frac{8}{3}x$$

Nullstellen bestimmen: Setze $f(x)=0$

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+\frac{8}{3}x=x\left(-\frac{2}{3}x+2x+\frac{8}{3}\right)$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist

$$x_1=0\ \vee\ -\frac{2}{3}x+2x+\frac{8}{3}=0$$

$$-\frac{2}{3}x^2+2x+\frac{8}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$-2x^2+6x+8 = 0$$

Setze $a=-2,\ b=6,\ c=8$ in die Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4\cdot(-2)\cdot 8}}{2\cdot(-2)}$$

$$= \frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{-4}$$

$$= \frac{-6\pm\sqrt{100}}{-4}$$

$$= \frac{-6\pm 10}{-4}$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = -1$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{3}x(x-4)(x+1)$$

f)

$$f(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^2+\frac{4}{9}=\frac{9}{4}\left(x^4-\frac{8}{9}x^2+\frac{16}{81}\right)\underset{\text{2. binomische Formel}}{=}\frac{9}{4}\left(x^2-\frac{4}{9}\right)^2\underset{\text{3. binomische Formel}}{=}\frac{9}{4}\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\right)^2$$

$$=\frac{9}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$$

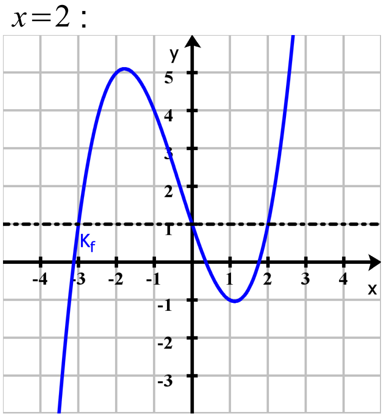
Funktionsgleichungen aufstellen

A) $f(x)=-\frac{3}{2}(x+1)(x-2)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$

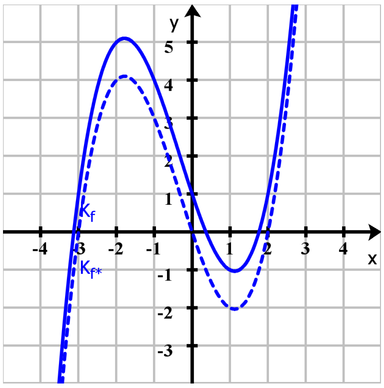
B) $f(x)=\frac{1}{6}(x+4)(x-1)(x-3)=\frac{1}{6}x^3-\frac{13}{6}x^2+2$

C) $f(x)=\frac{1}{15}(x+4)(x+2)x(x-3)=\frac{1}{15}x^4+\frac{1}{5}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{5}x$

D) Bei diesem Graphen sind die Nullstellen schlecht ablesbar. Allerdings schneidet die Gerade mit der Gleichung $y=1$ den Graphen exakt an den Stellen $x=-3$, $x=0$ und $x=2$:



Verschiebe den Graphen deshalb um 1 LE nach unten:



Die Funktionsgleichung zu dem verschobenen Graphen lässt sich nun mit Hilfe der Nullstellen und dem Punkt $P(-1\,|\,3)$ bestimmen:

$$f^*(x)=\frac{1}{2}(x+3)x(x-2)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x$$

die gesucht Funktionsgleichung ist $f(x)=f^*(x)+1=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+1$.

Parameter bestimmen

a) Bestimme die Lösungen der Gleichung $\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=0$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{8}{3} &= 0 \quad |\cdot 3\\
2x^2-8x+8 &= 0
\end{aligned}$$

Setze $a=2,\ b=-8,\ c=8$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 2\cdot 8}}{2\cdot 2}\\
&= \frac{8\pm\sqrt{64-64}}{4}\\
&= \frac{8\pm\sqrt{0}}{4}\\
&= \frac{8\pm 0}{4}\\
x_1 &= 2\\
x_2 &= 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a=-2$

b) Bestimme die Lösungen der Gleichung $2x^2-6x-36=0$:

$$\begin{aligned}
2x^2-6x-36 &= 0
\end{aligned}$$

Setze $a=2,\ b=-6,\ c=-36$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 2\cdot(-36)}}{2\cdot 2}\\
&= \frac{6\pm\sqrt{36+288}}{4}\\
&= \frac{6\pm\sqrt{324}}{4}\\
&= \frac{6\pm 18}{4}\\
x_1 &= 6\\
x_2 &= -3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a=-3$

c) Bestimme die Lösungen der Gleichung $x^3+x^2-6x=0$:

$$\begin{aligned}
x^3+x^2-6x &= 0\\
x\left(x^2+x-6\right) &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ x=0$ oder $x^2+x-6=0$

$$x^2+x-6 = 0$$

Setze $a=1,\ b=1,\ c=-6$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}\\
&= \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}\\
&= \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}\\
&= \frac{-1\pm 5}{2}\\
x_2 &= 2\\
x_3 &= -3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a=-2$

d) Bestimme die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}=0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2} &= 0 \quad | \cdot 2 \\ x^2+4x-5 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=1,\ b=4,\ c=-5$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} \\ &= \frac{-4\pm\sqrt{36}}{2} \\ &= \frac{-4\pm 6}{2} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= -5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a=1\ \wedge\ b=5$ oder $a=-5\ \wedge\ b=-1$

Modellieren

a) Funktionsgleichung der Parabel aufstellen:
Nullstellen bei $x=-2$ und $x=2\ \Rightarrow f(x)=a(x-2)(x+2)$
Die Kurve geht durch den Punkt $P(1{,}5\,|\,-1{,}05)$
$f(1{,}5)=a(-0{,}5)3{,}5=-1{,}75\,a=-1{,}05\ \Rightarrow\ a=0{,}6$
Tiefe des Kanals ist $-f(0)=2{,}4$ m .

b) Funktionsgleichung der Parabel aufstellen:
Nullstellen bei $x=-30$ und $x=30\ \Rightarrow f(x)=a(x-30)(x+30)$
Die Kurve geht durch den Punkt $P(15\,|\,30)$
$f(15)=a(-15)45=-675\,a=30\ \Rightarrow\ a=-\frac{2}{45}$
Höhe der Brücke ist $f(0)=40$ m .

