

Summenregel

Differentialquotient

p und g sind Funktionen mit $p(x)=x^2$ und $g(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$.

Die Funktion f ist definiert durch $f(x)=p(x)+g(x)$.

a) Der Differenzenquotient von f ist $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ordnen Sie folgende

Umformungsschritte so an, dass jeweils immer nur eine Umformung erfolgt.

Beschreiben Sie jeden Umformungsschritt mit eigenen Worten.

Lösung 1



$\frac{p(x)+g(x)-(p(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}$	$\frac{p(x)-p(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$	$\frac{x^2-x_0^2+x-x_0}{x-x_0}$
$\frac{(x-x_0)(x+x_0)+(x-x_0)}{x-x_0}$	$\frac{(x-x_0)((x+x_0)+1)}{x-x_0}$	$x+x_0+1$

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{p(x)+g(x)-(p(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} \\
 &= \frac{p(x)-p(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
 &= \frac{x^2-x_0^2+x-x_0}{x-x_0} \\
 &= \frac{(x-x_0)(x+x_0)+(x-x_0)}{x-x_0} \\
 &= \frac{(x-x_0)((x+x_0)+1)}{x-x_0}
 \end{aligned}$$



$$= \boxed{x + x_0 + 1}$$

b) Bestimmen Sie den Differentialquotienten von f .

Lösung 2



c) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen $f'(x)$ und $p'(x)$, $g'(x)$ her.

Lösung 3



Tipps und Lösungen

zu a) $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ | f durch p und g ersetzen

$$= \frac{p(x) + g(x) - (p(x_0) + g(x_0))}{x - x_0}$$

| Klammern auflösen

$$= \frac{p(x) - p(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

| Funktionsterme einsetzen

$$= \frac{x^2 - x_0^2 + x - x_0}{x - x_0}$$

| 3. binomische Formel anwenden

$$= \frac{(x - x_0)(x + x_0) + (x - x_0)}{x - x_0}$$

| Faktorisieren

$$= \frac{(x - x_0)((x + x_0) + 1)}{x - x_0}$$

| Kürzen

$$= x + x_0 + 1$$

zu b) $\lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 + 1 = \underbrace{2x_0}_{=p'(x)} + \underbrace{1}_{=g'(x)}$

zu c) $f'(x) = p'(x) + g'(x)$

Summenregel

f und h sind differenzierbare Funktionen, dann ist

$$(f(x) + h(x))' = f'(x) + h'(x)$$