

Potenzregel

Im folgenden wird untersucht, ob sich die Ableitungsfunktionen von Funktionen $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$ auch ohne explizite Grenzwertbildung bestimmen lässt. Dazu ist sehr Hilfreich folgende Termumformungen zu betrachten.

Binome multiplizieren

Vereinfachen Sie folgende Terme so weit wie möglich:

a) $(x - x_0) \cdot (x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)$

$$= x^3 + x^2 \cdot x_0 + x \cdot x_0^2 - x \cdot x_0^2 - x_0^3$$

$$= x^3 - x_0^3$$

b) $(x - x_0) \cdot (x^3 + x^2 \cdot x_0 + x \cdot x_0^2 + x_0^3)$

$$= x^4 + x^3 \cdot x_0 + x^2 \cdot x_0^2 + x \cdot x_0^3 - x^3 \cdot x_0 - x^2 \cdot x_0^2 - x \cdot x_0^3 - x_0^4$$

$$= x^4 - x_0^4$$

Lösung 1



Stellen Sie eine Vermutung zu einer Verallgemeinerung an:

c) $(x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$

$$= x^n + x^{n-1} \cdot x_0 + x^{n-2} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{n-1} - x^{n-1} \cdot x_0 - x^{n-2} \cdot x_0^2 - \dots - x_0^n$$

$$= x^n - x_0^n$$

Lösung 2





Differenzenquotient für Potenzfunktionen

Es ist $p(x) = x^4$. Vereinfachen Sie den Differenzenquotient so weit wie möglich:

$$\frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^4 - x_0^4}{x - x_0} = \frac{(x - x_0) \cdot (x^3 + x^2 \cdot x_0 + x \cdot x_0^2 + x_0^3)}{x - x_0} = x^3 + x^2 \cdot x_0 + x \cdot x_0^2 + x_0^3$$

Lösung 3



Allgemein: es ist $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{N}^*$.

Vereinfachen Sie den Differenzenquotient so weit wie möglich:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Lösung 4



Differentialquotient für Potenzfunktionen

$$f'(x) = \lim_{x_0 \rightarrow x} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a) Bilden Sie den Differentialquotient für $p(x) = x^4$:

$$p'(x) = \lim_{x_0 \rightarrow x} \frac{x^4 - x_0^4}{x - x_0} = x^3 + x^2 \cdot x + x \cdot x^2 + x^3 = x^3 + x^3 + x^3 + x^3 = 4x^3$$

b) Bilden Sie den Differentialquotient für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x_0 \rightarrow x} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + x^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x \cdot x^{n-2} + x_0^{n-1} \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{n\text{-mal}} = n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

Lösung 5



Tipps und Lösungen

Binome multiplizieren

$$\begin{aligned}\text{zu a)} \quad & (x - x_0) \cdot (x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2) \\ &= x^3 + x^2 \cdot x_0 + x \cdot x_0^2 - x \cdot x_0^2 - x_0^3 \\ &= x^3 - x_0^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{zu b)} \quad & (x - x_0) \cdot (x^3 + x^2 \cdot x_0 + x \cdot x_0^2 + x_0^3) \\ &= x^4 + x^3 \cdot x_0 + x^2 \cdot x_0^2 + x \cdot x_0^3 - x^3 \cdot x_0 - x^2 \cdot x_0^2 - x \cdot x_0^3 - x_0^4 \\ &= x^4 - x_0^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{zu c)} \quad & (x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ &= x^n + x^{n-1} \cdot x_0 + x^{n-2} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{n-1} - x^{n-1} \cdot x_0 - x^{n-2} \cdot x_0^2 - \dots - x_0^n \\ &= x^n - x_0^n\end{aligned}$$

Differenzenquotient für Potenzfunktionen

$$\text{zu a)} \quad \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^4 - x_0^4}{x - x_0} = \frac{(x - x_0) \cdot (x^3 + x^2 \cdot x_0 + x \cdot x_0^2 + x_0^3)}{x - x_0} = x^3 + x^2 \cdot x_0 + x \cdot x_0^2 + x_0^3$$

$$\begin{aligned}\text{zu b)} \quad & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\end{aligned}$$

Differentialquotient für Potenzfunktionen

$$\text{zu a)} \quad p'(x) = \lim_{x_0 \rightarrow x} \frac{x^4 - x_0^4}{x - x_0} = x^3 + x^2 \cdot x + x \cdot x^2 + x^3 = x^3 + x^3 + x^3 + x^3 = 4x^3$$

$$\begin{aligned}\text{zu b)} \quad & f'(x) = \lim_{x_0 \rightarrow x} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + x^{n-3} \cdot x^2 + \dots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{n\text{-mal}} = n \cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

