Differenzierbarkeit

f ist eine Funktion mit dem Definitionsbereich D.

Existiert der Differentialquotient

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ bzw. } \lim_{x_0 \to x} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

für $x \in A \subseteq D$, so ist f auf A differenzierbar und

$$f'(x)=\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ bzw. } f'(x)=\lim_{x_0 \to x} \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

die Ableitungsfunktion von f

Beispiele:

a) $f(x)=x^4,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)=4x^3,\ x \in \mathbb{R}$
(auf dem ganzen Definitionsbereich differenzierbar)

b) $f(x)=\frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ x \in \mathbb{R}^*$
(auf dem ganzen Definitionsbereich differenzierbar)

c) $f(x)=\sqrt{x},\ x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in \mathbb{R}_+^*$
(nicht auf dem ganzen Definitionsbereich differenzierbar)