



Lösungen zu Aufgaben zur momentanen Änderungsrate

Änderungsraten berechnen

a) $m_t = 6$

c) $m_t = 80$

b) $m_t = 32$

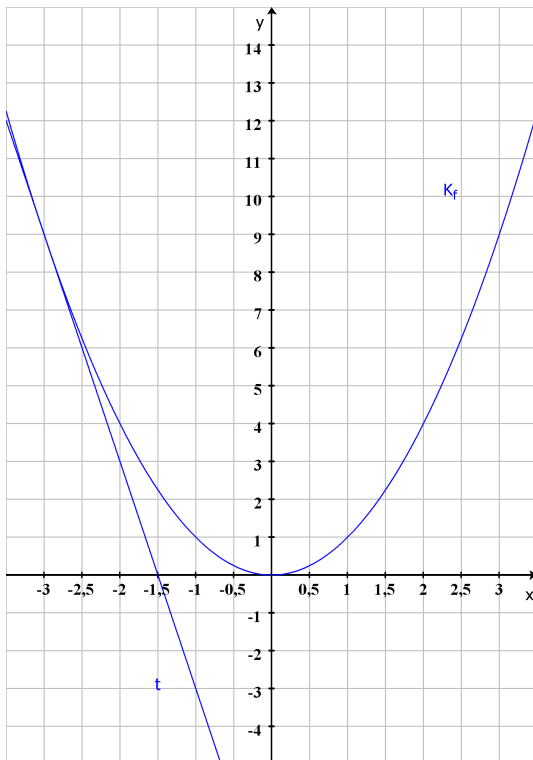
d) $m_t = \frac{3}{16}$

Tangenten

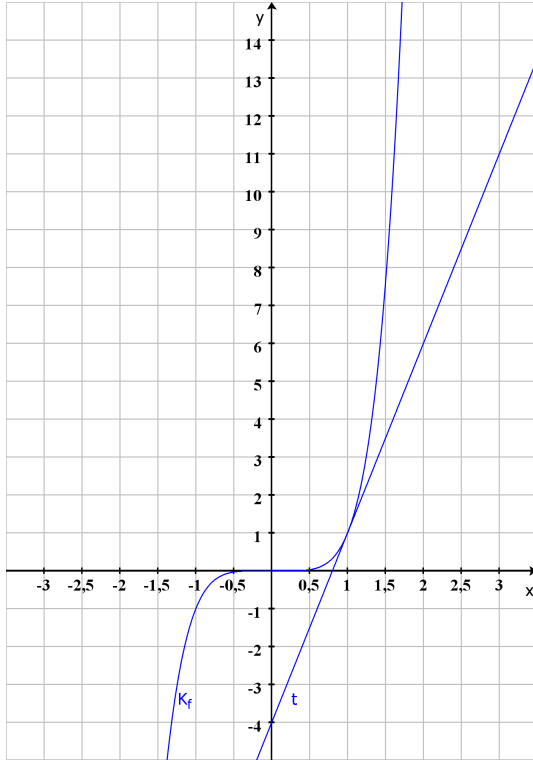
a) $f(-3) = 9 \Rightarrow$ Berührungspunkt $P = (-3|9)$

Steigung $m_t = -6$

$\Rightarrow$ Tangentengleichung $y = -6(x+3) + 9 = -6x - 9$



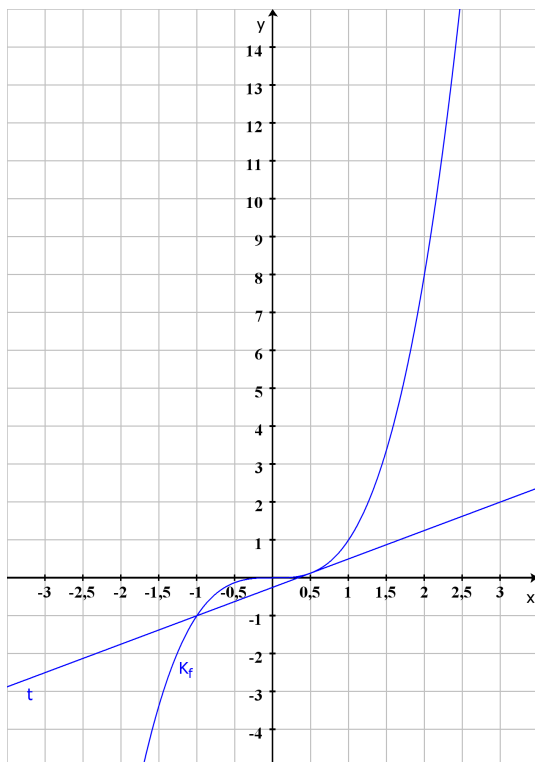
- b) $f(1)=1 \Rightarrow$ Berührungspunkt $P=(1|1)$
 Steigung $m_t=5$
 $\Rightarrow$ Tangentengleichung $y=5(x-1)+1=5x-4$



c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{Berührungspunkt } P = \left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{8}\right)$

Steigung $m_t = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ Tangentengleichung $y = \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$



Hilfe von der momentanen Änderungsrate

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h} = 5x^4 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Damit steigt die Kurve außer an der Stelle $x=0$, dort hat sie die Steigung 0.

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn $n-1$ ist eine gerade Zahl und damit ist $x^{n-1} > 0$.

c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^4 - 3^4}{h} = 4 \cdot 3^3 = 108 \quad \wedge \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^4 - (-3)^4}{h} = 4 \cdot (-3)^3 = -108$



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

2020 Henrik Horstmann



$$d) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{2n} - x^{2n}}{h} = 2n \cdot x^{2n-1}$$

weiter ist $2n \cdot (-x)^{2n-1} = -2n \cdot x^{2n-1}$, was zu zeigen war.

Alternativ: Aufgrund der Symmetrieeigenschaft von K_f (K_f ist symmetrisch zu y-Achse), muss die Steigung der Tangente in einem Punkt $P=(x|f(x))$ gleich der negativen Steigung der Tangente im Punkt $Q=(-x|f(-x))$ sein.

Negative Exponenten

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} && | \text{Brüche gleichnamig machen} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} && | \text{Brüche zusammenfassen} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x^2 + hx}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x^2 + hx)} && | \text{kürzen} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2 + hx} \\ &= -\frac{1}{x^2} && x \neq 0 \end{aligned}$$

