Lösungen zu Aufgaben zur mittleren Änderungsrate

Änderungsraten berechnen

a) $f(3)=4 \;\wedge\; f(1)=1$

$\Rightarrow\; m_{\text{absolut}}=3 \;\wedge\; m_{\text{mittel}}=\frac{3}{2}$

b) $f(4)=3 \;\wedge\; f(0)=7$

$\Rightarrow\; m_{\text{absolut}}=-4 \;\wedge\; m_{\text{mittel}}=-1$

c) $f(7)=1 \;\wedge\; f(2)=\frac{2}{7}$

$\Rightarrow\; m_{\text{absolut}}=\frac{5}{7} \;\wedge\; m_{\text{mittel}}=\frac{1}{7}$

d) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \;\wedge\; f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow\; m_{\text{absolut}}=\frac{2-\sqrt{6}}{2} \wedge m_{\text{mittel}}=\frac{6(2-\sqrt{6})}{\pi}$

Mittlere Änderungsrate – Terme

a)

$$\begin{aligned}
m_{\text{mittel}} &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{2x_2^3-x_2-\left(2x_1^3-x_1\right)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{2x_2^3-2x_1^3-(x_2-x_1)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{2\cdot\left(x_2^3-x_1^3\right)-(x_2-x_1)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{2\cdot(x_2-x_1)\left(x_2^2+x_2x_1+x_1^2\right)-(x_2-x_1)}{x_2-x_1} \\
&= 2\cdot\left(x_2^2+x_2x_1+x_1^2\right)-1
\end{aligned}$$

b)
$$
\begin{aligned}
m_{\text{mittel}} &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}{x_2-x_1} \\
&= \frac{\frac{x_1}{x_1 \cdot x_2}-\frac{x_2}{x_1 \cdot x_2}}{x_2-x_1} \\
&= \frac{\frac{x_1-x_2}{x_1 \cdot x_2}}{x_2-x_1} \\
&= \frac{x_1-x_2}{x_1 \cdot x_2 \cdot (x_2-x_1)} \\
&= -\frac{x_2-x_1}{x_1 \cdot x_2 \cdot (x_2-x_1)} \\
&= -\frac{1}{x_1 \cdot x_2}
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
m_{\text{mittel}} &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{(x_2-2)(x_2+3)-(x_1-2)(x_1+3)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{x_2^2+3x_2-2x_2-6-\left(x_1^2+3x_1-2x_1-6\right)}{x_2-x_1} \\
&= \frac{x_2^2+x_2-6-x_1^2-x_1+6}{x_2-x_1} \\
&= \frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}+\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1} \\
&= \frac{(x_2-x_1)\cdot(x_2+x_1)}{x_2-x_1}+1 \\
&= x_2+x_1+1
\end{aligned}
$$

Mittlere Änderungsrate – Eigenschaften

a) $f(-3)=-\frac{1}{2}$

$m_{\text{mittel}}=0=\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$

$\Leftrightarrow\ 0=\frac{h^3-9h^2+20h-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{h}$

$\Leftrightarrow\ 0=\frac{h^3-9h^2+20h-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{h}$

$\Leftrightarrow\ 0=\frac{h\left(h^2-9h+20\right)}{h}$

$\Leftrightarrow\ 0=h^2-9h+20$

$h_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm 1}{2}$

$h=5\ \vee\ h=4$

b) $g(x+h)$ wächst mit größer werdendem h exponentiell, damit erhöht sich auch das absolute Wachstum $g(x+h)-g(x)$ exponentiell. Der Nenner in der mittleren Änderungsrate wächst jedoch nur linear. Damit muss der Quotient der mittleren Änderungsrate für wachsendes h ebenfalls wachsen.

c) $0>m_{\text{mittel}}=\frac{p(2+h)-p(2)}{h}$

$\Leftrightarrow\ 0>\frac{\frac{1}{2}h^3+\frac{1}{2}h^2-6h+3-3}{h}$

$\Leftrightarrow\ 0>\frac{\frac{1}{2}h^3+\frac{1}{2}h^2-6h}{h}$

$\Leftrightarrow\ 0>\frac{h\left(\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h-6\right)}{h}$

$\Leftrightarrow\ 0>\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h-6$

Untersuche die Parabel $\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h-6$ auf Nullstellen:

$$\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h-6=0 \;\Leftrightarrow\; h_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{-1\pm 7}{2}$$
$$\Rightarrow\; h=3 \;\vee\; h=-4$$

Da die Parabel nach oben geöffnet ist, ist $m_{\text{mittel}}<0$ für $h\in]-4;\,3[$.

Allerdings muss $h>0$ sein, damit ist das gesuchte Intervall $h\in]0;\,3[$.