Lösungen zu Aufgaben zum Mittelwert

Mittelwert Berechnen

a)
$$m=\frac{1}{4-(-2)}\int_{-2}^{4} f(x)\,dx=\frac{1}{6}\int_{-2}^{4}\left(x^2-x-2\right)dx=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{4}$$
$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{3}\cdot 4^3-\frac{1}{2}\cdot 4^2-2\cdot 4-\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)\right)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[\frac{16}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{1}{6}\cdot 6=1$$

b)
$$m=\frac{1}{2\pi-\pi}\int_{\pi}^{2\pi} h(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(\sin(x))\,dx=\frac{1}{\pi}[-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}[-\cos(2\pi)-(-\cos(\pi))]$$
$$=\frac{1}{\pi}[-1-1]=\frac{1}{\pi}\cdot(-2)=-\frac{2}{\pi}$$

Fragen rund um den Mittelwerte

a)

(1)
$$m_f=\frac{1}{8-2}\int_{2}^{8} f(x)\,dx=\frac{1}{6}\int_{2}^{8}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+7x+1\right)dx=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2+x\right]_{2}^{8}$$
$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{8}\cdot 8^4-\frac{3}{2}\cdot 8^3+\frac{7}{2}\cdot 8^2+8-\left(\frac{1}{8}\cdot 2^4-\frac{3}{2}\cdot 2^3+\frac{7}{2}\cdot 2^2+8\right)\right]$$
$$=\frac{1}{6}[-24-6]=\frac{1}{6}\cdot(-30)=-5$$

$$m_h=\frac{1}{8-2}\int_{2}^{8} h(x)\,dx=\frac{1}{6}\int_{2}^{8}\left(-\frac{5}{3}\left(x^2-5x\right)\right)dx=\frac{1}{6}\left[\frac{25}{6}x^2-\frac{5}{9}x^3\right]_{2}^{8}$$
$$=\frac{1}{6}\left[\frac{25}{6}\cdot 8^2-\frac{5}{9}\cdot 8^3-\left(\frac{25}{6}\cdot 2^2-\frac{5}{9}\cdot 2^3\right)\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[-\frac{160}{9}-\frac{110}{9}\right]=\frac{1}{6}\cdot(-30)=-5$$

$$\Rightarrow\ m_f=m_h$$

(2) $p(x)=m\cdot x\ ;\ m\neq 0\qquad(\Rightarrow p'(x)\neq 0)$
$$m_p=\frac{1}{6}\int_{2}^{8}(m\cdot x)\,dx=\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{m}{2}x^2\right]_{2}^{8}=\frac{1}{6}\left(\frac{m}{2}\cdot 8^2-\left(\frac{m}{2}\cdot 2^2\right)\right)$$
$$=\frac{1}{6}(32m-2m)=\frac{1}{6}\cdot 30m=5m=-5\ \Rightarrow\ m=-1\ \Rightarrow\ p(x)=-x$$

b) $\frac{1}{3}=m_f=\frac{1}{7-5}\int_5^7 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_5^7\left(x^2+(1-k)x-k\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{(1-k)}{2}x^2-kx\right]_5^7$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\cdot 7^3-\frac{(1-k)}{2}\cdot 7^2-k\cdot 7-\left(\frac{1}{3}\cdot 5^3-\frac{(1-k)}{2}\cdot 5^2-k\cdot 5\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{833}{6}-\frac{63}{2}k-\left(\frac{325}{6}-\frac{35}{2}k\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{254}{3}-14k\right]=\frac{127}{3}-7k \;\Rightarrow\; -7k=\frac{1}{3}-\frac{127}{3}=-42 \;\Rightarrow\; k=6$

c) $\int_5^9 h(x)\,dx=12 \;\Leftrightarrow\; m_h=\frac{1}{4}\int_5^9 h(x)\,dx=3$

Fall 1: $h(5)=3$ womit die Behauptung gezeigt ist.

Fall 2: $h(5)<3$, dann muss es ein $x_0\in[5;\,9]$ geben, so dass $\frac{h(x_0)+h(5)}{2}=3 \;\Leftrightarrow\; h(x_0)=6-h(5)>3$. Da h stetig ist, muss h im Intervall $[5;\,x_0]$ alle Werte aus $[h(5);\,h(x_0)]$ annehmen, d.h. es gibt ein $k\in[h(5);\,h(x_0)]$, so dass $h(k)=3$ ist, was zu zeigen war.

Fall 3: $h(5)>3$ geht genau wie Fall 2.

$h(5)>3$, dann muss es ein $x_0\in[5;\,9]$ geben, so dass $\frac{h(x_0)+h(5)}{2}=3 \;\Leftrightarrow\; h(x_0)=6-h(5)<3$. Da h stetig ist, muss h im Intervall $[5;\,x_0]$ alle Werte aus $[h(5);\,h(x_0)]$ annehmen, d.h. es gibt ein $k\in[h(5);\,h(x_0)]$, so dass $h(k)=3$ ist, was zu zeigen war.

Anwendungsbezug

a) Durchschnittsgeschwindigkeit in den 20 Sekunden ist

$m=\frac{1}{20}\int_0^{20} f(t)\,dt=\frac{1}{20}\int_0^{20}\left(\frac{3}{40}t^2\right)dt=\frac{1}{20}\left[\frac{1}{40}t^3\right]_0^{20}=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{40}\cdot 8000=10\,\text{m/s}$

b) Durchschnittswassermenge in den ersten 5 Stunden:

$m=\frac{1}{5}\int_0^5 h(t)\,dt=\frac{1}{5}\int_0^5\left(e^{2t}+3\right)dt=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}e^{2t}+3t\right]_0^5=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}e^{10}+15-\frac{1}{2}\right]\approx 2205{,}55$

Es fließen in den ersten 5 Stunden im Durchschnitt 2.205.550 l Wasser in den See.

c)

(1) $f(13{,}25) \approx 9$°C

(2) Suche das globale Maximum von $f(t)$:

$$f'(t) = \frac{3}{125}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{5}{2} \;\wedge\; f''(t) = \frac{6}{125}t - \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ \frac{3}{125}t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{5}{2} &= 0 \quad |\cdot 250 \\ 6t^2 - 150t + 625 &= 0 \quad |\cdot 250 \end{aligned}$$

In die Lösungsformel einsetzen:

$$t = \frac{150 \pm \sqrt{(-150)^2 - 4\cdot 6\cdot 625}}{2\cdot 6}$$
$$= \frac{150 \pm \sqrt{22500 - 15000}}{12}$$
$$= \frac{150 \pm \sqrt{7500}}{12}$$
$$= \frac{150 \pm 50\cdot\sqrt{3}}{12}$$

$$\Rightarrow\; t = \frac{25\cdot(3+\sqrt{3})}{12} \quad (\approx 19{,}72) \;\vee\; t = \frac{25\cdot(3-\sqrt{3})}{12} \quad (\approx 5{,}28)$$

$f''\left(\frac{25\cdot(3+\sqrt{3})}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{5} > 0 \;\Rightarrow$ lokales Minimum

$f''\left(\frac{25\cdot(3-\sqrt{3})}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{5} < 0 \;\Rightarrow$ lokales Maximum

Randwerte betrachten:

$$f(0) = 10 \;\wedge\; f\left(\frac{25\cdot(3-\sqrt{3})}{12}\right) = \frac{360 - 125\sqrt{3}}{36} \approx 16{,}01 \;\wedge\; f(24) = \frac{974}{125} \approx 7{,}79$$

$\Rightarrow$ für $t = \frac{25\cdot(3-\sqrt{3})}{12} \approx 5{,}28$ ist die Temperatur am höchsten

$0{,}28\cdot 60 = 16{,}8 \;\Rightarrow$ um $5{:}17$ Uhr war die Temperatur am höchsten.

(3)
$$m_t = \frac{1}{5{,}5}\int_{6{,}5}^{18} f(t)\,dt = \frac{1}{5{,}5}\int_{6{,}5}^{18}\left(\frac{1}{125}t^3 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{2}t + 10\right)dt$$
$$= \frac{1}{5{,}5}\left[\frac{1}{500}t^4 - \frac{1}{10}t^3 + \frac{5}{4}t^2 + 10t\right]_{5{,}5}^{18}$$
$$= \frac{1}{5{,}5}\left(\frac{26469}{125} - \frac{624041}{8000}\right) = \frac{1}{5{,}5}\cdot\frac{42799}{320} = \frac{42799}{1760} \approx 24{,}32\text{°C}$$

Die durchschnittliche Temperatur im Zeitraum von 06:30 Uhr bis 18:00 Uhr betrug 24,3 °C.