Lösungen zu
Aufgaben zum Volumen von Rotationskörper

Volumen Berechnen

a) $V=\pi\int_0^5 (f(x))^2\,dx=\pi\int_0^5 x^4\,dx=\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^5=\pi\left[\frac{1}{5}\cdot 5^5-0\right]=625\pi \quad (\approx 1963{,}5)$

b) $V=\pi\int_0^4 (f(x))^2\,dx=\pi\int_0^4 4x\,dx=\pi\left[2x^2\right]_0^4=\pi\left[2\cdot 4^2-0\right]=32\pi \quad (\approx 100{,}531)$

c)

$$V=\pi\int_6^{12} (f(x))^2\,dx=\pi\int_6^{12}\left(\frac{1}{3}\left(x^2-x+3\right)\right)^2 dx=\pi\int_6^{12}\frac{1}{9}\left(x^2-x+3\right)^2 dx$$

$$=\pi\int_6^{12}\frac{1}{9}\left(x^4-2x^3+7x^2-6x+9\right)dx=\frac{\pi}{9}\int_6^{12}\left(x^4-2x^3+7x^2-6x+9\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{9}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{7}{3}x^3-3x^2+9x\right]_6^{12}$$

$$=\frac{\pi}{9}\left[\frac{1}{5}\cdot 12^5-\frac{1}{2}\cdot 12^4+\frac{7}{3}\cdot 12^3-3\cdot 7^2+9\cdot 12-\left(\frac{1}{5}\cdot 6^5-\frac{1}{2}\cdot 6^4+\frac{7}{3}\cdot 6^3-3\cdot 7^2+9\cdot 6\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{9}\left[\frac{215532}{5}-\frac{6786}{5}\right]=\frac{\pi}{9}\left[\frac{208746}{5}\right]=\frac{23194}{5}\pi \quad (\approx 45783{,}1)$$

Stellungnahme

Die Behauptung ist falsch, denn

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx-\pi\int_a^b (h(x))^2\,dx=\pi\int_a^b (f(x))^2-(h(x))^2\,dx$$

$$\underset{\text{3. binomische Formel}}{=}\pi\int_a^b (f(x)-h(x))\cdot(f(x)+h(x))\,dx$$

$$\neq\pi\int_a^b (f(x)-h(x))\cdot(f(x)-h(x))\,dx$$

$$=\pi\int_a^b (f(x)-h(x))^2\,dx$$

Beweise

a) K_{Kegel} ist ein Kegel mit der Höhe h und dem Radius r.

Wird die Gerade mit der Funktionsgleichung $f(x)=\frac{r}{h}x$ um die x-Achse rotiert, so umstreicht sie auf dem Intervall $[0;\,h]$ den Kegel K_{Kegel}.

Damit ist $V_{\text{Kegel}}=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx=\pi\left[\frac{r^2}{3h^2}x^3\right]_0^h=\pi\left(\frac{r^2}{3h^2}h^3\right)=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot h$

womit die Formel bewiesen ist.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2021 Henrik Horstmann

b) K_{Kegel} ist eine Kugel mit dem Radius r.

Ein Kreis mit dem Radius r wird durch die Gleichung $x^2+y^2=r^2$ beschrieben. Damit ist der Graph K_f der Funktion , $-r \leq x \leq r$ ist ein Halbkreis. Rotiert K_f um die x-Achse, so umstreicht sie eine Kugel mit dem Radius r. Das Volumen der Kugel ergibt sich dann durch

$$V_{\text{Kugel}}=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx=\pi\int_{-r}^{r} r^2-x^2 dx=\pi\left[r^2 x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$

$$=\pi\left(r^3-\frac{1}{3}r^3-\left(r^2\cdot(-r)-\frac{1}{3}(-r)^3\right)\right)=\pi\left(r^3-\frac{1}{3}r^3-\left(-r^3+\frac{1}{3}r^3\right)\right)$$

$$=\pi\left(r^3-\frac{1}{3}r^3+r^3-\frac{1}{3}r^3\right)=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$$

was zu zeigen war.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2021 Henrik Horstmann