Integralrechnung (Lösungen)

Aufgabe 1

Bestimmen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$

b) $\int_0^2 (x^3+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_0^2 = 6$

c) $\int_1^2 (5x^4+x)\,dx = \left[x^5+\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 32{,}5$

d) $\int_{-1}^1 (4x^2-x+1)\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^1 = 4{,}\overline{6}$

e) $\int_1^{1{,}5} \left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\right)dx = \left[\mathrm{e}^x+\frac{x}{2}\right]_1^{1{,}5} = 2{,}0134$

Aufgabe 2

Es ist die Funktion f mit $f(x) = 2x+\sin(x)$ gegeben. Bestimmen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[x^2-\cos(x)\right]_0^1 = 1-\cos(1)-(0-\cos(0)) = 1-0{,}5403+1 = 1{,}4597$

b) $\int_0^\pi f(x)\,dx = \left[x^2-\cos(x)\right]_0^\pi = \pi^2-\cos(\pi)-(0-\cos(0)) = 9{,}8696+1+1 = 11{,}8696$

c) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} f(x)\,dx = \left[x^2-\cos(x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} = 4\pi^2-\cos(2\pi)-\left(\frac{\pi^2}{9}-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 39{,}4784-1-1{,}0966+0{,}5 = 37{,}8818$$

Aufgabe 3

Es ist folgende Gleichung gegeben:

$$\int_0^k \left(3x^2 - x\right) dx = \int_{-2}^k \left(3x^3 - \frac{5}{2}\right) dx$$

Bestimmen Sie die exakten Werte von k, für welche die Gleichung gilt.

$$\begin{aligned}
\int_0^k \left(3x^2 - x\right) dx &= \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^k \\
&= k^3 - \frac{1}{2}k^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^k \left(3x^2 - \frac{5}{2}\right) dx &= \left[x^3 - \frac{5}{2}x\right]_{-2}^k \\
&= k^3 - \frac{5}{2}k - (8 - 5) \\
&= k^3 - \frac{5}{2}k - 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k^3 - \frac{1}{2}k^2 &= k^3 - \frac{5}{2}k - 3 \quad \left| -k^3 + \frac{5}{2}k + 3 \right. \\
-\frac{1}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 3 &= 0
\end{aligned}$$

Setze $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 3$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
k_{1,2} &= \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6}}{-1} \\
&= \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}}{-1} \\
&= \frac{-\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}}{-1} \\
k_1 &= -1 \\
k_2 &= 6
\end{aligned}$$