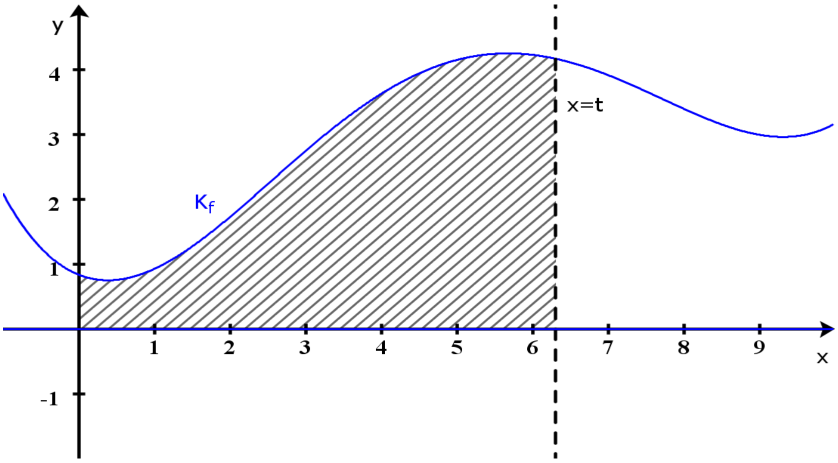
Integralrechnung

f ist eine stetige und Riemann integrierbare Funktion. Dann ist $F(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ die Flächenfunktion zwischen dem Graphen von f, den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x=t$.

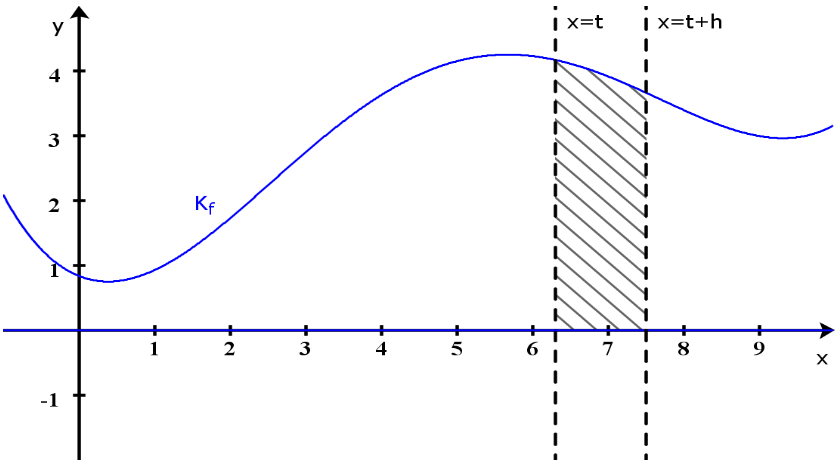


Hauptsatz der Differential- und Integralfunktion

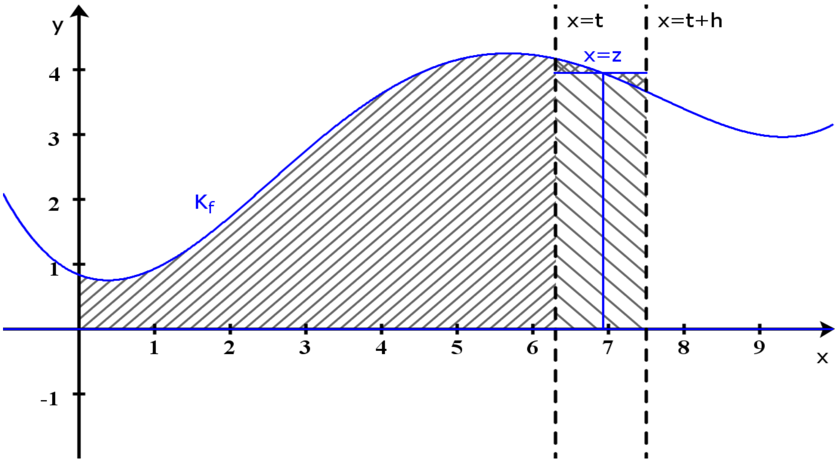
Ist $F(t)=\int_0^t f(x)\,dx$ immer eine Stammfunktion von $f(x)$?

Folgende Betrachtung:

Zunächst einmal ist $F(t+h)-F(t)$ der Flächeninhalt der im folgenden Schaubild markierten Fläche.



Nach dem Zwischenwertsatz gibt es einen Wert z mit $t\leq z\leq t+h$, so dass $F(t+h)-F(h)=h\cdot f(z)$.



Daraus folgt, dass $\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=f(z)$ ist.

Jetzt muss nur noch die Ableitung betrachtet werden:

$$F'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\lim_{h\to 0} f(z)\underset{(i)}{=}f(t)$$

(i) $\lim_{h\to 0}(t+h)=t \;\wedge\; t\leq z\leq t+h \;\Rightarrow\; z=t$ für $h\to 0$

Damit ist auch $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, denn

1) $F(b)$ ist der Flächeninhalt zwischen K_f , den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x=b$.

2) $F(a)$ ist der Flächeninhalt zwischen K_f , den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x=a$.

3) $\int_a^b f(x)dx$ ist der Flächeninhalt zwischen K_f , der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=a$ und $x=b$.

Damit muss $\int_a^b f(x)dx$ die Differenz von $F(b)$ und $F(a)$ sein.

Welche Stammfunktion ist die richtige?

Unbeantwortet ist nach wie vor die Frage, welche Stammfunktion denn zur Berechnung des Bestimmten Integrals verwendet werden soll oder muss. Glücklicherweise ist die Antwort ganz einfach, es spielt keine Rolle welche, denn:

$$F'(x)=f(x) \;\Rightarrow\; (F(x)+c)'=f(x) \;,\; c\in\mathbb{R}$$

$$F(b)-F(a)=F(b)+c-F(a)-c=(F(b)+c)-(F(a)+c)$$