

Integralrechnung

f ist eine Funktion mit $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}_+$ und K_f der Graph von f . K_f , die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = b \in \mathbb{R}_+$ begrenzen die Fläche A .

Riemann Integral

Für immer größer werdendes n nähert sich $A_{OS}(n)$ und $A_{US}(n)$ dem tatsächlichen Flächeninhalt von A an.

Damit stellt sich die Frage nach Grenzwerten für $n \rightarrow \infty$: $dx = \frac{b}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{OS}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(i \cdot dx) \cdot dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \cdot b^3 \right] = \frac{1}{3} b^3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{US}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (f(i \cdot dx) \cdot dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \cdot b^3 \right] = \frac{1}{3} b^3$$

Beide Grenzwerte sind gleich.

Sind zu einer beliebigen Funktion f die Grenzen der Ober- bzw. Untersumme gleich, so ist

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{OS}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{US}(n) = \int_0^b f(x) dx$$

$\int_0^b f(x) dx$ ist das bestimmte Integral.

