Integralrechnung

f ist eine Funktion mit $f(x)=x^2$, $x \in \mathbb{R}_+$ und K_f der Graph von f. K_f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=b \in \mathbb{R}_+$ begrenzen die Fläche A.

Obersumme

Die Obersumme A_{OS} ist:

	Umformung
$A_{OS}(n) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{n}\cdot f\left(\frac{b}{n}\cdot(i+1)\right)\right)$	als Term
$= \frac{b}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{b}{n}\cdot(i+1)\right)$	Konstante Faktoren aus der Summe ziehen
$= \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{b}{n}\cdot i\right)$	Verschieben der Summengrenzen
$= \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b}{n}\cdot i\right)^2$	in Funktionsterm einsetzen
$= \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b}{n}\right)^2 i^2$	Anwendung von Potenzgesetzen
$= \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$	Konstante Faktoren aus der Summe ziehen
$= \frac{b^3}{n^3}\left(0+\sum_{i=1}^{n} i^2\right)$	Summe um den Summenden 0 erweitern
$= \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=0}^{n} i^2$	den Summanden 0 in die Summe ziehen
$\underset{1)}{=} \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)$	Quadratsumme durch Term ersetzen
$= b^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$	kürzen

Integralrechnung

Untersumme

Die Untersumme A_{US} ist:

	Umformung
$A_{US}(n) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{n}\cdot f\left(\frac{b}{n}\cdot i\right)\right)$	als Term
$= \frac{b}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{b}{n}\cdot i\right)$	Faktoren aus der Summe ziehen
$= \frac{b}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{n}\cdot i\right)^2$	in den Funktionsterm einsetzen
$= \frac{b}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{n}\right)^2 i^2$	Potenzgesetze anwenden
$= \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2$	Faktoren aus der Summe ziehen
$\overset{}{\underset{1)}{=}} \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{1}{3}(n-1)^3+\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{6}(n-1)\right)$	ersetze Quadratsumme durch Term
$= \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{2}{6}(n-1)^3+\frac{3}{6}(n-1)^2+\frac{1}{6}(n-1)\right)$	Brüche gleichnamig machen
$= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{2(n-1)^3+3(n-1)^2+n-1}{6}$	Brüche summieren
$= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{2(n^3-3n^2+3n-1)+3(n^2-2n+1)+n-1}{6}$	Expandieren
$= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3-6n^2+6n-2+3n^2-6n+3+n-1}{6}$	Expandieren
$= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3-6n^2+3n^2+6n-6n+n-2+3-1}{6}$	Summenden umsortieren
$= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{6}$	Zusammenfassen
$= \frac{b^3}{n^3}\cdot\left(\frac{2n^3}{6}-\frac{3n^2}{6}+\frac{n}{6}\right)$	Bruch in Summe zerlegen
$= b^3\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$	kürzen

Quadratsumme berechnen

$s(n)$, $n \in \mathbb{N}$ ist die Quadratsumme über die Zahlen 0 bis n: $s(n)=\sum_{i=0}^{n} i^2$.

Behauptung: $s(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$

Beweis:

Durch nachrechnen ergibt sich für $n=0$ und $n=1$

$S(0)=0 \wedge s(1)=1$

Damit gilt die Behauptung für $n=0$ und $n=1$.

Weiter ist

		Umformung
$s(n)-s(n-1)$	$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ $-\left(\frac{1}{3}(n-1)^3+\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{6}(n-1)\right)$	in Funktionsterme einsetzen
	$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n-\frac{1}{3}(n^3-3n^2+3n-1)$ $-\frac{1}{2}(n^2-2n+1)-\frac{1}{6}(n-1)$	Expandieren
	$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n-\frac{1}{3}n^3+n^2-n+\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{2}n^2+n-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}n+\frac{1}{6}$	Expandieren
	$=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n-\frac{1}{6}n+n^2$ $+n-n-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$	Summanden umordnen
	$=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n-\frac{1}{6}n+n^2$ $+n-n-\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}$	Brüche gleichnamig machen
	$=n^2$	Zusammenfassen

Damit gilt die Behauptung.