

Integralrechnung

f ist eine Funktion mit $f(x)=x^2$, $x \in \mathbb{R}_+$ und K_f der Graph von f . K_f , die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=b \in \mathbb{R}_+$ begrenzen die Fläche A .

Obersumme

Die Obersumme A_{OS} ist:

Umformung

$$\begin{aligned} A_{OS}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{n} \cdot f\left(\frac{b}{n} \cdot (i+1)\right) \right) \\ &= \frac{b}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{b}{n} \cdot (i+1)\right) \\ &= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{b}{n} \cdot i\right) \\ &= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{b}{n} \cdot i\right)^2 \\ &= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{b}{n}\right)^2 i^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \left(0 + \sum_{i=1}^n i^2 \right) \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=0}^n i^2 \\ &\stackrel{1)}{=} \frac{b^3}{n^3} \left(\frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n \right) \\ &= b^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \end{aligned}$$



Integralrechnung

Untersumme

Die Untersumme A_{US} ist:

Umformung

$$A_{US}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{n} \cdot f\left(\frac{b}{n} \cdot i\right) \right)$$

$$= \frac{b}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{b}{n} \cdot i\right)$$

$$= \frac{b}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{n} \cdot i \right)^2$$

$$= \frac{b}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{n} \right)^2 i^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \left(\frac{1}{3} (n-1)^3 + \frac{1}{2} (n-1)^2 + \frac{1}{6} (n-1) \right)$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \left(\frac{2}{6} (n-1)^3 + \frac{3}{6} (n-1)^2 + \frac{1}{6} (n-1) \right)$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{2(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + n-1}{6}$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{2(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + 3(n^2 - 2n + 1) + n - 1}{6}$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{2n^3 - 6n^2 + 6n - 2 + 3n^2 - 6n + 3 + n - 1}{6}$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{2n^3 - 6n^2 + 3n^2 + 6n - 6n + n - 2 + 3 - 1}{6}$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \cdot \left(\frac{2n^3}{6} - \frac{3n^2}{6} + \frac{n}{6} \right)$$

$$= b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$



Integralrechnung

Quadratsumme berechnen

$s(n)$, $n \in \mathbb{N}$ ist die Quadratsumme über die Zahlen 0 bis n : $s(n) = \sum_{i=0}^n i^2$.

Behauptung: $s(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

Beweis:

Durch nachrechnen ergibt sich für $n=0$ und $n=1$

$$s(0)=0 \wedge s(1)=1$$

Damit gilt die Behauptung für $n=0$ und $n=1$.

Weiter ist

Umformung

$$\begin{aligned} s(n) - s(n-1) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ &\quad - \left(\frac{1}{3}(n-1)^3 + \frac{1}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{6}(n-1) \right) \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - \frac{1}{3}(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) \\ &\quad - \frac{1}{2}(n^2 - 2n + 1) - \frac{1}{6}(n - 1) \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - \frac{1}{3}n^3 + n^2 - n + \frac{1}{3} \\ &\quad - \frac{1}{2}n^2 + n - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}n + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - \frac{1}{6}n + n^2 \\ &\quad + n - n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - \frac{1}{6}n + n^2 \\ &\quad + n - n - \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung.

