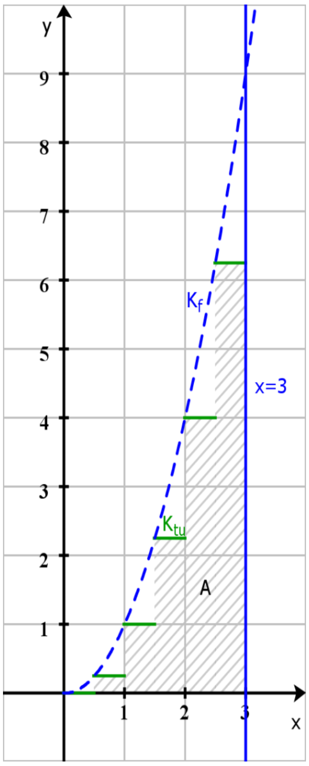
Integralrechnung

f ist eine Funktion mit $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}_+$ und K_f der Graph von f.

Treppenfunktion unterhalb

K_{t_u} ist der Graph von t_u, einer Treppenfunktion. K_f und K_{t_u} sind in nebenstehendem Schaubild eingezeichnet. K_{t_u}, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=3$ begrenzen die Fläche A. A ist in dem Schaubild schraffiert.



a) Bestimmen Sie die Größe des Flächeninhalts von A.

b) Die senkrechte Gerade schneidet die x-Achse bei b und t_u hat n Treppenabsätze. Geben Sie einen Term an, mit dem sich der Flächeninhalt von A berechnen lässt.

a) $A=0{,}5\cdot f(0)+0{,}5\cdot f(0{,}5)+0{,}5\cdot f(1)+0{,}5\cdot f(1{,}5)$
$+0{,}5\cdot f(2)+0{,}5\cdot f(2{,}5)$
$=0{,}5\cdot 0^2+0{,}5\cdot 0{,}5^2+0{,}5\cdot 1^2+0{,}5\cdot 1{,}5^2$
$+0{,}5\cdot 2^2+0{,}5\cdot 2{,}5^2$
$=0{,}5\cdot 0+0{,}5\cdot 0{,}25+0{,}5\cdot 1+0{,}5\cdot 2{,}25$
$+0{,}5\cdot 4+0{,}5\cdot 6{,}25$
$=0+0{,}125+0{,}5+1{,}125+2+3{,}125$
$=6{,}875\,FE$

b) Breite der Treppenabsätze ist $dx=\frac{b}{n}$.

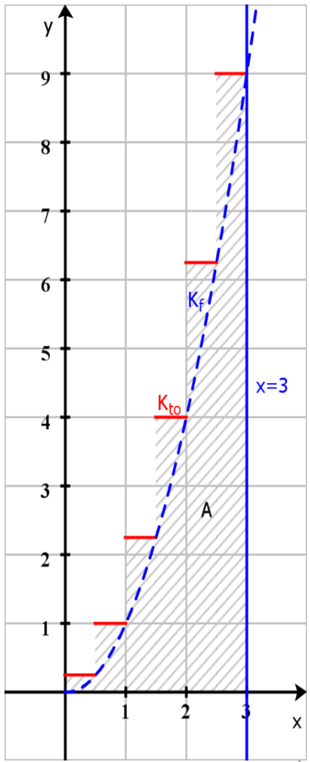
Höhe der Treppenabsätze ist $f\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)$ mit $i\in\mathbb{N}\ \wedge\ 0\le i\le n-1$.

Damit ist $A=\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot dx\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)^2\cdot dx\right)$

Tipp: $a_i\in\mathbb{R}\ (0<i<n)$: $a_0+a_1+\cdots+a_n=\sum_{i=0}^{n} a_i$

Treppenfunktion oberhalb

K_{t_o} ist der Graph von t_o, einer Treppenfunktion. K_f und K_{t_o} sind in nebenstehendem Schaubild eingezeichnet. K_{t_o}, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=3$ begrenzen die Fläche A. A ist in dem Schaubild schraffiert.



a) Bestimmen Sie die Größe des Flächeninhalts von A.

b) Die senkrechte Gerade schneidet die x-Achse bei b und t_u hat n Treppenabsätze. Geben Sie einen Term an, mit dem sich der Flächeninhalt von A berechnen lässt.

a)
$$A=0{,}5\cdot f(0{,}5)+0{,}5\cdot f(1)+0{,}5\cdot f(1{,}5)+0{,}5\cdot f(2)+0{,}5\cdot f(2{,}5)+0{,}5\cdot f(3)$$
$$=0{,}5\cdot 0{,}5^2+0{,}5\cdot 1^2+0{,}5\cdot 1{,}5^2+0{,}5\cdot 2^2+0{,}5\cdot 2{,}5^2+0{,}5\cdot 3^2$$
$$=0{,}5\cdot 0{,}25+0{,}5\cdot 1+0{,}5\cdot 2{,}25+0{,}5\cdot 4+0{,}5\cdot 6{,}25+0{,}5\cdot 9$$
$$=0{,}125+0{,}5+1{,}125+2+3{,}125+4{,}5$$
$$=11{,}375\,FE$$

b) Breite der Treppenabsätze ist $dx=\frac{b}{n}$.

Höhe der Treppenabsätze ist $f\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)$ mit $i\in\mathbb{N}\wedge 1\le i\le n$.

Damit ist $A=\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)\cdot dx\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)^2\cdot dx\right)$