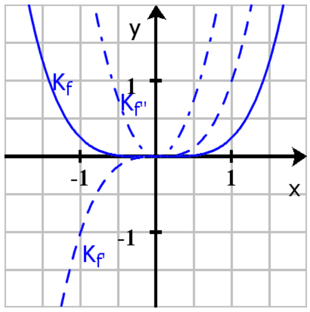
Extremstellen (3)



f ist eine Funktion mit $f(x)=\frac{1}{4}x^4$, $x \in \mathbb{R}$. K_f ist der Graph von f.

K_f ist im nebenstehenden Schaubild dargestellt. Offensichtlich besitzt f an der Stelle $x=0$ ein Extremum.

Wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind

<u>Aufgabe 1:</u> Zeigen Sie, dass die Bedingungen für Extremstellen in diesem Fall nicht vollständig erfüllt sind.

$f'(x) = x^3$ $f''(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x=0$

$f''(0) = 0$

Die hinreichende Bedingung ist nicht erfüllt.

Lösung 1

<u>Aufgabe 2:</u> Zeichnen Sie in obiges Schaubild die Graphen $K_{f'}$ und $K_{f''}$ der ersten und zweiten Ableitungsfunktion von f ein.

Lösung 2

<u>Aufgabe 3:</u> Da f an der Stelle $x=0$ eine Extremstelle besitzt, muss $K_{f'}$ die x-Achse der Stelle $x=0$ schneiden. Geben Sie einen entsprechenden Nachweis an.

$f''(x) = 3x^2 \geq 0 \Rightarrow f'$ ist monoton steigend $\Rightarrow K_{f'}$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x=0$

alternativ:

$f''(0) = 0$ (Nullstelle)

$f'''(x) = 6x$, $f''''(x) = 6$

$f'''(0) = 0$ und $f''''(0) = 6 > 0 \Rightarrow K_{f''}$ hat an der Stelle $x=0$ einen Tiefpunkt $\Rightarrow f''(x) \geq 0 \Rightarrow f'$ ist monoton steigend $\Rightarrow K_{f'}$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x=0$

Lösung 3

Aufgabe 4: Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem sichergestellt ist, dass die Extremstelle gefunden wird.

Suche nach Nullstellen von f'(x).

Überprüfe mit f''(x), ob die Steigung an den Nullstellen ≠0 ist.

Ist die Steigung =0, dann überprüfe, ob f''(x) an der Nullstelle ein Extremum besitzt.

Aufgabe 5: Erweitern Sie Ihr Verfahren aus Aufgabe 4, so dass auch die Extremstelle von $f(x)=x^{2n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ gefunden wird.

Suche nach Nullstellen von f'(x).
Überprüfe mit f''(x), ob die Steigung an den Nullstellen ≠0 ist.
Ist die Steigung =0, dann überprüfe, ob f''(x) an der Nullstelle ein Extremum besitzt. Dazu überprüfe die Bedingungen f'''(x)=0 und f''''(x)≠0.
Ist f'''(x)≠0, dann besitzt f''(x) an der Nullstelle kein Extremum und damit hat auch f an der Stelle kein Extremum.
Sollte f''''(x)=0 sein, So überprüfe auf die gleiche Weise, ob f''' an der Nullstelle ein Extremum hat.
Dies wird solange fortgeführt bis feststeht, dass die einzelnen Ableitungsfunktionen ein Extremum besitzen.