

Exponentialfunktionen

Mit der Exponentialfunktion modellieren

Vorbemerkung

Wenn es um das Modellieren geht, stellt sich immer auch die Frage, was modelliert werden soll. Anstatt fiktiver Daten für die mittels einer „Geschichte“ ein Zusammenhang hergestellt wird, werden in dem vorliegenden Unterricht reale, von den Schülerinnen und Schülern selbst erhobene Daten verwendet und hinsichtlich eines Zusammenhangs untersucht. Dadurch wird eine große Nähe zum Praxisbezug geschaffen und es ist zu erwarten, dass durch den gesamten Prozess (vom Generieren der Daten bis zum Erstellen eines mathematischen Modells und dessen Überprüfung) eine große Motivation für das Thema erzeugt wird.

Unterrichtsplanung

Dauer: 180 Minuten

Material: Folie

Arbeitsblatt zu Bestimmung einer Basis

Leporello mit Lösungen für die Selbstkontrolle des Arbeitsblatt

Arbeitsblatt zum Schneckenhaus

Übungsblatt

1. Entsprechend der Versuchsbeschreibung zum Abkühlungsprozess (Exponentialfunktionen.Modellieren.Abkuehlungsversuch.pdf) wird der Versuch vorbereitet. Während der Unterrichtsschritte 2 und 3 erfolgt die Messdatenerfassung gemäß der Versuchsbeschreibung. Sie erfolgt somit beiläufig neben dem weiteren Unterricht.
2. Den Schülerinnen und Schülern wird ein Datensatz vorgelegt und es wird die Aufgabe gestellt, herauszufinden, ob die Daten näherungsweise mit einer Exponentialfunktion modelliert werden können (Folie Exponentialfunktionen.Modellieren.Einstieg.Folie.pdf):



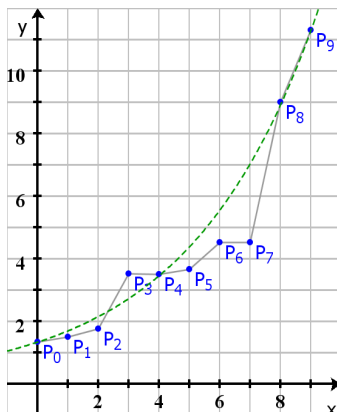
Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).
2020 Henrik Horstmann

Exponentialfunktionen

x	y
0	1,34779
1	1,50361
2	1,7638
3	3,52146
4	3,51594
5	3,6773
6	4,53617
7	4,53617
8	9,00336
9	11,30077

Die Aufgabe ist deshalb so offen gestellt, damit sie dazu anregt eine Strategie zu entwickeln bzw. einen Lösungsweg zu suchen. Mögliche Ansätze sind z.B.:

a) Zeichnerisch:



Bis auf zwei „Ausreißer“ liegen die Punkte in der Nähe einer exponentiellen Kurve.

b) Rechnerisch:

x	y		q
0	1,34779	}	$\frac{1,5}{1,35} \approx 1,11$
1	1,50361		
2	1,7638	}	$\frac{1,76}{1,5} \approx 1,17$
3	3,52146		
4	3,51594	}	$\frac{3,52}{3,52} \approx 1$
5	3,6773		
6	4,53617	}	$\frac{4,54}{3,68} \approx 1,23$
7	4,53617		
8	9,00336	}	$\frac{9}{4,54} \approx 1,98$
9	11,30077		
			$\frac{11,3}{9} \approx 1,26$

Bis auf zwei „Ausreißer“ ergibt sich, dass $y_{i+1} \approx q \cdot y_i$ mit $q \in]1;2]$

Im Plenum werden die Lösungsansätze zusammengetragen und diskutiert.



Exponentialfunktionen

Insbesondere soll darauf eingegangen werden, dass es in der Regel unmöglich ist festzustellen, ob tatsächlich ein exponentieller Zusammenhang besteht. Vielmehr wird beim Modellieren ein Modell, hier eine Funktion, gesucht, mit welchem der Sachverhalt so beschrieben wird, dass die möglichen Fehler (=Abweichungen) die dabei auftreten zu vernachlässigen sind. Insbesondere diese Frage kann an dem Beispiel mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden.

3. Beim modellieren durch eine Exponentialfunktion stellt sich als nächstes die Frage, wie sich eine geeignete Basis bestimmen lässt.

Sollte in der vorherigen Unterrichtsphase der rechnerische Ansatz nicht aufgetaucht sein, so sollen die Schülerinnen sich diesen mit Hilfe eines Arbeitsblatts (Exponentialfunktionen.Modellieren.AB.01.pdf) erarbeiten. Andernfalls wird dieser Schritt ausgelassen.

Sollte die Messdatenerfassung aus dem Abkühlungsprozess noch nicht abgeschlossen sein, so wird der Unterrichtsschritt 5 vorgezogen.

4. In dieser Unterrichtsphase soll der Temperaturverlauf während des Abkühlungsprozess modelliert werden. Dazu sind folgende Schritte nötig:

- a) Als erstes muss die Frage beantwortet werden, ob eine Exponentialfunktion ein geeignetes Mittel ist, um den Temperaturverlauf zu modellieren. Folgende Argumente sprechen dafür:

- ◆ Bei gleichen Zeitintervallen reduziert sich die Temperatur nahezu um einen konstanten Faktor.
- ◆ Die Temperatur fällt monoton und nähert sich der Umgebungstemperatur an.

- b) Es müssen folgende Parameter bestimmt werden: $f(t) = a \cdot q^t + c$,

Parameter a : Temperatur bei Beginn der Messungen

Parameter q : Faktor um den sich die Temperatur in einem bestimmten Zeitintervall reduziert.

Parameter c : Umgebungstemperatur

Die Berechnung von q ist mit verschiedenen Hürden verbunden:



Exponentialfunktionen

- ◆ Wird q aus den Quotienten der gemessenen Temperaturen berechnet, so sind die Temperaturen relativ zur Umgebungstemperatur zu betrachten:

$$q_i = \frac{\text{temp}_{i+1} - \text{Umgebungstemperatur}}{\text{temp}_i - \text{Umgebungstemperatur}}$$

- ◆ Bei der Ermittlung eines „Durchschnittsquotienten“ darf nicht das arithmetische Mittel verwendet werden (siehe Arbeitsblatt Exponentialfunktionen.Modellieren.AB.01.pdf)

c) Beurteilung des Modells.

5. In dieser Unterrichtsphase wird exponentielles Verhalten in der Natur entdeckt. Genauer genommen soll die Gestalt eines Schneckenhauses untersucht werden, denn in ihr kann eine logarithmische Spirale entdeckt werden.

Es wird ein Schneckenhaus und dessen Seitenansicht gezeigt. Dazu wird das Ziel erläutert, eine mathematische Beschreibung der Spirale im Schneckenhaus zu finden. Damit ist das Ziel für alle klar und die einzelnen Schritte in der Vorgehensweise besser nachvollziehbar.

Als erstes muss die logarithmische Spirale eingeführt werden, denn die Entwicklung der Spirale erfolgt nicht entlang einer Achse, sondern vielmehr im Kreis herum.

Sind den Schülerinnen und Schülern Polarkoordinaten bereits bekannt, so kann die Gleichung $r(\phi) = a \cdot e^{\phi} + c$ betrachtet werden. Das Schaubild zu der Gleichung ergibt die logarithmische Spirale. Allerdings ist anzunehmen, dass Polarkoordinaten erst zu einem späteren Zeitpunkt eingeführt werden und somit das Wissen darüber nicht zur Verfügung steht. Deshalb wird dieser Ansatz hier nicht weiter beschrieben.

Für Schülerinnen und Schüler, die kein Vorwissen zu Polarkoordinaten haben, ist das Video zur logarithmischen Spirale (https://Logarithmische_Spirale.web.mp4) gedacht. Es zeigt, wie aus einer Kurve einer Exponentialfunktion eine logarithmische Spirale konstruiert werden kann, ganz ohne Polarkoordinaten. In dem Video wird lediglich auf das Bogenmaß eingegangen. Entweder ist dies eine



Exponentialfunktionen

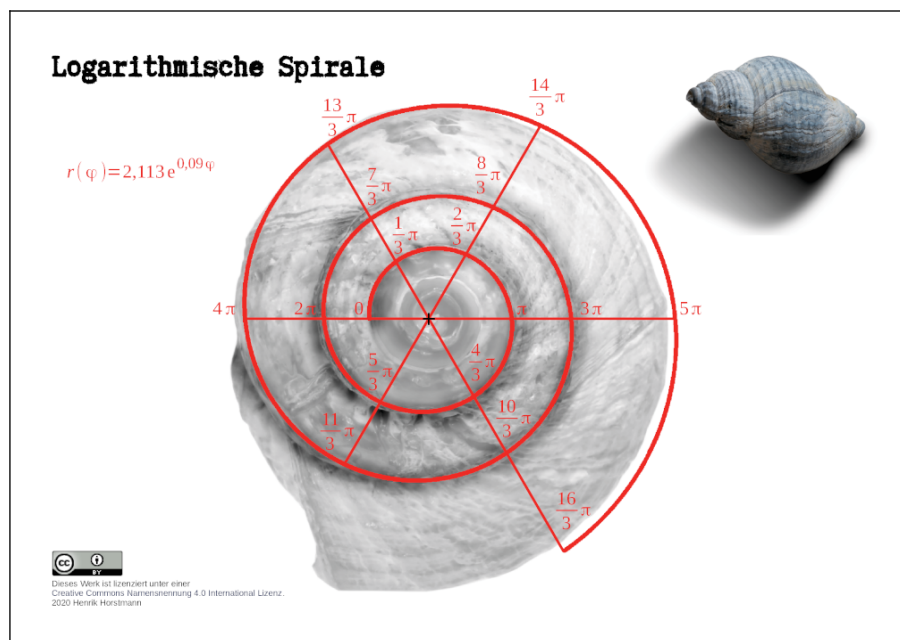
Wiederholung, womit Wissen wieder aufgefrischt wird oder es ist ein Ausblick auf die trigonometrischen Funktionen.

Entsprechend der Anleitung aus dem Video zeichnet jede Schülerin und jeder Schüler zunächst eine logarithmische Spirale. Dazu sollten die Schülerinnen und Schüler Zugriff auf das Video haben (z.B. über ihr Smartphone), damit sie sich zu unklaren Punkten die Erklärungen noch einmal ansehen können

Durch diese Übung wird der Zusammenhang zwischen Kurve einer Exponentialfunktion und logarithmischer Spirale vertieft. Denn dieser Zusammenhang ist wichtig, wenn es darum geht die logarithmisch Spirale zu „formen“.

Nachdem vorläufig alle Fragen zur logarithmischen Spirale geklärt wurden, erhält jede Schülerin und jeder Schüler das Arbeitsblatt zum Schneckenhaus (Exponentialfunktionen.Modellieren.AB.02.pdf). Auf dem Arbeitsblatt ist die Seitenansicht eines Schneckenhauses stark vergrößert abgebildet. Ein Kreuz kennzeichnet den Spiralmittelpunkt. Aufgabe ist es nun die Parameter a und k zu bestimmen, so dass die Spirale zur Funktion $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ den Verlauf der Spirale im Schneckenhaus beschreibt.

Die Schülerinnen und Schüler sollen möglichst selbstständig einen Lösungsweg für die Aufgabe finden. Die im folgenden beschriebene Vorgehensweise ist deshalb in erster Linie für die Lehrkraft gedacht.



Exponentialfunktionen

- a) Durch den Spiralmittelpunkt werden drei Geraden gezeichnet, so dass zwei Geraden immer einen Winkel von 60° bzw. $\frac{1}{3}\pi$ einschließen.
- b) Dort wo die Geraden die Spirale des Schneckenhauses schneidet werden Markierungen angebracht.
- c) Eine der eingezeichneten Halbgeraden mit Endpunkt im Mittelpunkt der Spirale wird mit dem Wert Null gekennzeichnet. Im Uhrzeigersinn erhalten die folgenden Halbgeraden die Bezeichnungen $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, usw.
- d) Aus dem Bild können nun Paare aus Winkel und Radius einer Markierung auf der Spirale gebildet werden. Diese Daten bilden die Grundlage zum Modellieren.

Das Modellieren kann nun analog zum Abkühlungsprozess erfolgen oder aber mittels Regression. Dies hat den Vorteil, dass die Regression wieder in Erinnerung gerufen und damit das Wissen darüber gefestigt wird. Die Beurteilung der Qualität des Modells kann dann über den Korrelationskoeffizienten erfolgen.

- 6. Ein weiteres Üben und Festigen des Modellierens erfolgt mit einem Übungsblatt.

