

Natürliche Exponentialfunktion

Um was geht es?

Gesucht ist eine Basis $\diamond$ der Funktionsgleichung $f(x) = \diamond^x$, so dass die Tangente an K_f an der Stelle $x=0$ die y-Achse im Winkel von 45° schneidet (siehe nebenstehendes Schaubild).

Tangente

Bestimmen Sie den Funktionsterm der Tangente: $t(x) = \dots$

Lösung 1

Lineare Approximation

- Bestimmen Sie mit Hilfe des nebenstehenden Schaubilds die Differenz (auf zwei Nachkommastellen genau) zwischen den Funktionswerten von f und der Tangente an den folgenden Stellen: $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{4}$,

$$x_3=\frac{1}{2} \text{ und } x_4=\frac{1}{4}.$$

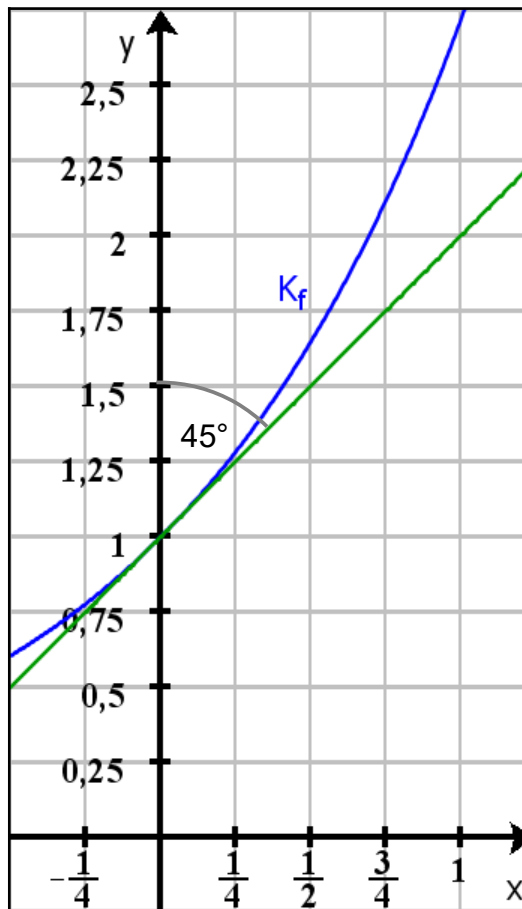
Lösung 2

Hinweis: Beachten Sie die Skalierung!

- Was passiert mit dem vertikalen Abstand zwischen Tangente und K_f für $x \rightarrow 0$ von ∞ ?
- Geben Sie ein Intervall für x an, für das in nebenstehendem Schaubild kein Abstand zwischen K_f und der Tangente erkennbar ist.

Lösung 3

Lösung 4



Skalierung: 1 cm $\hat{=}$ $\frac{1}{4}$ LE
 $\Rightarrow$ gemessene Länge $\cdot \frac{1}{4}$

In der Nähe der Berührstelle von Tangente und K_f gilt:

$$f(x) = \diamond^x \approx t(x)$$

Diese Annäherung wird **lineare Approximation** genannt.

$f(x) = \diamond^x$ approximieren*

- Wählen Sie ein $x > 0$, für das der Abstand zwischen K_f und Tangente möglichst gering ist.

Lösung 5

- Setzen Sie das gewählte x in die Annäherung $\diamond^x \approx t(x)$ ein und lösen Sie nach $\diamond$ auf.

Lösung 6

Formaler Zusammenhang

Begründen Sie, dass für sehr große n

$$\diamond \approx \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n$$

ein guter Näherungswert ist.

Lösung 7

Geht's noch besser?

Bestimmen Sie $\diamond$ mit einer Genauigkeit von 4 Stellen nach dem Komma.

Lösung 8

Wie lässt sich $\diamond$ sich noch genauer bestimmen?

Lösung 9

* Approximieren = Annähern

