# Die Basis und ihr Einfluss

## Vorbemerkung

Für diese Unterrichtseinheit müssen die Schülerinnen und Schüler über folgendes Vorwissen verfügen:

- Kenntnisse über den funktionalen Zusammenhang beim Spiegeln von Graphen.
- Kenntnisse über den funktionalen Zusammenhang von Strecken und Stauchen von Graphen.
- Potenzgesetze

## Unterrichtsplanung

Dauer: 90 Minuten
Material: Folie
2 Arbeitsblätter

1. Es wird untersucht, was mit dem Graphen passiert, wenn von der Basis einer Exponentialfunktion der Kehrwert gebildet wird. Um die Komplexität in den Betrachtungen zu reduzieren werden zunächst nur Basen aus $\mathbb{Q}$ untersucht:

   $$f_q(x)=\left(\frac{1}{q}\right)^x \wedge h_q(x)=q^x,\ q\in\mathbb{N}^*$$

   Der erste Teil der Untersuchung findet in Partnerarbeit mit Hilfe eines Arbeitsblatts (Arbeitsblatt Exponentialfunktionen.Die_Basis.AB.01.pdf) statt. Die Ergebnisse daraus werden im Plenum diskutiert und die Vermutung, dass die Graphen an der y-Achse gespiegelt sind in den Fokus gerückt. Als Strategie zur Überprüfung der Vermutung eignet sich vermutlich am besten:

   $$K_h \text{ ist } K_f \text{ an der y-Achse gespiegelt } \Leftrightarrow h_q(x)=f_q(-x)$$

   Das Überprüfen findet im Plenum statt:

   $$f_q(-x)=\left(\frac{1}{q}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{q}\right)^{(-1)\cdot x}=\left(\left(\frac{1}{q}\right)^{(-1)}\right)^x=\left(\frac{1}{q^{-1}}\right)^x=q^x=h_q(x)$$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann

Diese Aussage gilt auch für alle $q \in \mathbb{R}$ und es folgt, dass es zu jeder Exponentialfunktion $h_b(x)=b^x$ mit $1<b$ eine Exponentialfunktion $f_b(x)=\left(\frac{1}{b}\right)^x$ gibt, deren Graph durch Spiegelung des Graphen von $h_b$ an der y-Achse entsteht.

Insbesondere lässt sich aus dieser Eigenschaft das Verhalten von $f_b(x)=b^x$ mit $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ für $x \to -\infty$ ableiten. Eine Frage, welche die Schülerinnen und Schüler selbstständig beantworten sollen (Exponentialfunktionen.Die_Basis.globales_Verhalten.Arbeitsauftrag.Folie).

2. In der zweiten Unterrichtsphase soll die Entdeckung stehen, dass eine Veränderung der Basis eine horizontale Streckung bzw. Stauchung des Graphen zur Folge hat.

   Dazu erhalten die Schülerinnen und Schüler die Frage (Folie Exponentialfunktionen.Die_Basis.Arbeitsauftrag.Folie.pdf):

   **Welche Lage haben die Kurven von $f_q$ und $f_{q+1}$ für $x>0$ zu einander?**[1]

   $K_{f_q}$ liegt für $x>0$ immer oberhalb von $K_{f_{q+1}}$

   **Begründen Sie Ihre Aussage.**

   $$q<q+1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{q}>\frac{1}{q+1} \;\Rightarrow \left(\frac{1}{q}\right)^n>\left(\frac{1}{q+1}\right)^n,\; n>0$$

   Das nur der Bereich für $x>0$ betrachtet wird, ist darin begründet, die Komplexität der Fragestellung deutlich zu reduzieren.

   Selbstständig (gegebenen Falls in Partnerarbeit) und ohne Hilfsmittel sollen die Schülerinnen und Schüler die Frage beantworten.

   Es ist ein Anliegen, dass die oben geschilderten mathematischen Zusammenhänge von den Schülerinnen und Schülern selbstständig gedanklich entwickelt werden. Mit einem Hilfsmittel wie z.B. Geogebra kann der Sachverhalt zwar auf eine einfache Art und Weise veranschaulicht werden, allerdings wird dann der Gedankenprozess (zumindest zum Teil) vom Hilfsmittel durchgeführt.

1 Wobei $f_q(x)=\left(\frac{1}{q}\right)^x$ mit $q \in \mathbb{N}^*$ ist.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann

Im Plenum werden die Ergebnisse diskutiert und der Schluss gezogen:

$f(x)=b^x \wedge h(x)=a^x$ mit $0<a,b<1$, dann gilt:
$a<b \Rightarrow K_f$ liegt für $0<x$ oberhalb von $K_h$

Dieses Ergebnis wird auf einem Arbeitsblatt
(Arbeitsblatt Exponentialfunktionen.Die_Basis.AB.02.pdf) dokumentiert.

3. Daraus ergibt sie die Frage
(Arbeitsblatt Exponentialfunktionen.Die_Basis.AB.02.pdf):

**In welcher Beziehung stehen $K_{f_{q+1}}$ und $K_{f_q}$?**

Die Schülerinnen und Schüler sollen aus dem Vorwissen über Strecken und Stauchen von Graphen einen funktionalen Zusammenhang zwischen $f_q(x)$ und $f_{q+1}(x)$ herstellen. Dazu untersuchen die Schülerinnen und Schüler zunächst einen ganz konkreten Fall und weisen nach, dass $f(2x)=h(x)$ ist, mit $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ und $h(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^x$, $x\in\mathbb{R}$. Diese Untersuchung soll einen Zugang zum allgemeinen Nachweis öffnen, den den Schülerinnen und Schüler angeleitet auf dem Arbeitsblatt selbstständig führen.

4. Im Plenum werden die Ergebnisse diskutiert und gegebenen Falls an einem Beispiel die Erkenntnisse demonstriert.

Beispiel $q=2$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 2^n=3$$

Diese Frage ließe sich mit dem Logarithmus leicht beantworten, der ist allerdings zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt.

Näherungsweise kann mit dem Taschenrechner untersucht werden, dass $n\approx 1{,}59$ ist. Dabei kann der Bezug zu einem Näherungsverfahren (z.B. Intervallschachtelung) hergestellt werden.

5. In einer Übungsphase werden die Erkenntnisse gefestigt und Bezüge zu anderen Themen hergestellt (Übungsaufgaben
Exponentialfunktionen.Die_Basis.Aufgaben.pdf).

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann