

# Exponentialfunktionen

## Globales Verhalten

### Wie klein denn noch?

Betrachten wir die Folge  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ :

|       |                              |                              |                                                                              |                                                                                                |                                                                                                                  |     |
|-------|------------------------------|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| $n =$ | 0                            | 1                            | 2                                                                            | 3                                                                                              | 4                                                                                                                | ... |
|       | $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^1$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4}$ | ... |
|       | =                            | =                            | =                                                                            | =                                                                                              | =                                                                                                                | =   |
|       | 1                            | $\frac{1}{2}$                | $\frac{1}{4}$                                                                | $\frac{1}{8}$                                                                                  | $\frac{1}{16}$                                                                                                   | ... |

Es ist offensichtlich, dass  $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$  ist. Für zunehmendes  $n$  wird der Wert jedoch immer

kleiner. Daraus ergibt sich:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Dies gilt im übrigen auch, wenn  $n \in \mathbb{R}$  und  $0 < b < 1$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$

### Wohin strebt die Exponentialfunktion?

Betrachtet wird  $f_b(x) = b^x$  mit  $0 < b < 1$ . Dann gilt:

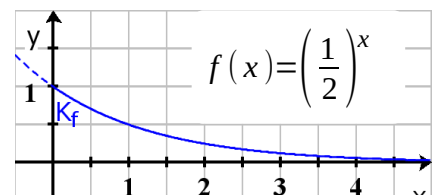
$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b^n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_b(n)$$

Woraus wir das globale Verhalten für  $x \rightarrow \infty$  ableiten können:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f_b(x) = b^x \rightarrow 0, \quad 0 < b < 1$$

### Was passiert mit dem Graphen?

Da die Funktionswerte für zunehmendes  $x$  immer kleiner werden aber immer größer als Null sind (siehe oben) muss sich der Graph von oben der x-Achse annähern. Die x-Achse ist waagerechte Asymptote.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

2020 Henrik Horstmann

# Exponentialfunktionen

## Und was ist, wenn $1 < b$ ?

Betrachten wir die Folge  $2^n$  für  $n \in \mathbb{N}$  :

|       |       |       |       |       |       |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $n =$ | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | ... |
|       | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | ... |
|       | =     | =     | =     | =     | =     | =   |
|       | 1     | 2     | 4     | 8     | 16    | ... |

Es ist offensichtlich, dass jedes Glied dieser Folge der Kehrwert des entsprechenden Gliedes aus der Folge  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  ist. Für zunehmendes  $n$  wird der Wert statt immer kleiner jetzt immer größer. Allerdings gibt es keine Schranke nach oben. Daraus ergibt sich:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow 2^n \rightarrow \infty$$

Dies gilt im übrigen auch, wenn  $n \in \mathbb{R}$  und  $1 < b$  :  $n \rightarrow \infty \Rightarrow b^n \rightarrow \infty$

## Wohin strebt die Exponentialfunktion?

Betrachtet wird  $f_b(x) = b^x$  mit  $1 < b$  . Dann gilt:

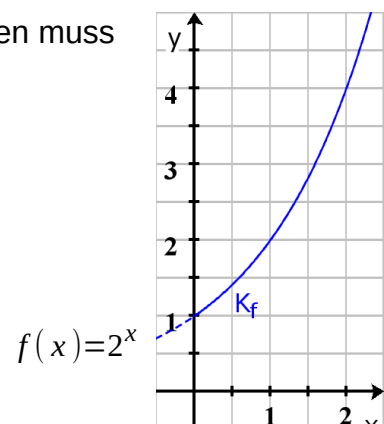
$$b^n = f_b(n)$$

Woraus wir das globale Verhalten für  $x \rightarrow \infty$  ableiten können:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f_b(x) = b^x \rightarrow \infty, \quad 1 < b$$

## Was passiert mit dem Graphen?

Da die Funktionswerte für zunehmendes  $x$  immer größer werden muss der Graph nach oben weglaufen.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

2020 Henrik Horstmann