Exponentialfunktionen

Globales Verhalten

Vorbemerkung

Es wird zunächst nur das Verhalten von Exponentialfunktionen für $x \to \infty$ betrachtet.

Das Verhalten für $x \to -\infty$ ist nicht Gegenstand dieser Unterrichtseinheit, da durch die negativen Exponenten die Komplexität erheblich steigt.

Stattdessen wird in einer weiteren Unterrichtseinheit gezeigt, dass K_h durch Spiegelung von K_f an der y-Achse entsteht, wenn $f_b(x)=b^x$ und $h_b(x)=\left(\frac{1}{b}\right)^x$. Aus diesem Zusammenhang lässt sich spielend und auch mit geringem Vorstellungsvermögen das globale Verhalten von Exponentialfunktionen für $x \to -\infty$ herleiten.

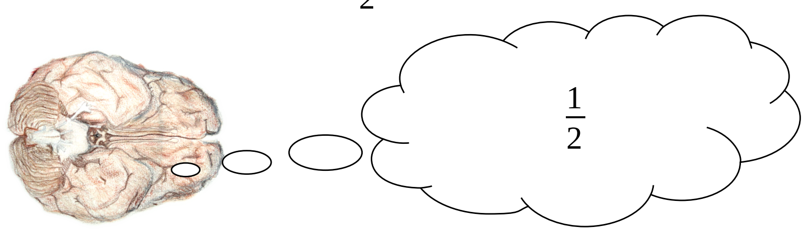
Unterrichtsplanung

Dauer: 45 Minuten
Material: Folien

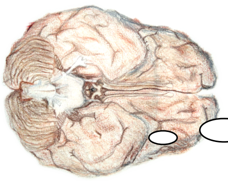
1. Ziel dieser Unterrichtsphase ist es, zu entdecken, dass $x \to \infty \Rightarrow f_b(x)=b^x \to 0$ für $0<b<1$ ist.

   Die Entdeckung soll während eines Gedankenexperiments erfolgen, das jede Schülerin und jeder Schüler für sich durchführen soll. Aus diesem Grund schließen alle Schülerinnen und Schüler die Augen und lauschen den Anweisungen (Folie Exponentialfunktionen.Die_Asymptote.Gedankenexperiment.Folie.pdf):

   a) Stellen Sie sich die Zahl $\frac{1}{2}$ vor.

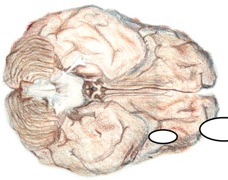


b) Potenzieren Sie diese mit 2. Brüche werden potenziert, in dem Zähler und Nenner für sich potenziert werden.



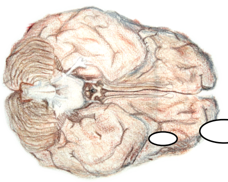
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1^2}{2^2}=\frac{1}{4}$$

c) Stellen Sie das Ergebnis rechts neben die $\frac{1}{2}$.



$$\frac{1}{2},\frac{1}{4}$$

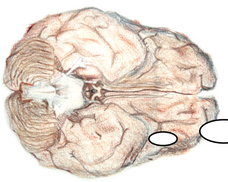
d) Potenzieren Sie $\frac{1}{2}$ jetzt mit 3 und Stellen Sie das Ergebnis rechts neben die Folge der Brüche.



$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{2\cdot2\cdot2}=\frac{1}{8}$$

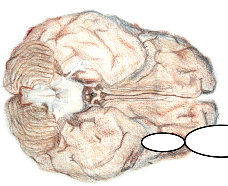
$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$$

e) Diese Folge von Brüchen lässt sich unendlich fortsetzen, in dem als nächstes mit 4, danach mit 5 usw. potenziert wird.



$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\left(\frac{1}{2}\right)^4,\left(\frac{1}{2}\right)^5,\ldots$$

f) Beantworten Sie für sich die Frage, wohin diese Folge strebt.



Die Folgenglieder werden immer kleiner. Da die Basis jedoch positiv ist, sind die Folgenglieder immer größer als Null. Damit streben die Folgenglieder gegen Null.

Zur Kontrolle notiert jede Schülerin und jeder Schüler sowohl die Folge, als auch seine Antwort auf die Frage auf ein Blatt Papier. Dadurch ergibt sich ein Rückschluss, ob es im einzelnen Probleme bei der Vorstellung des Sachverhalts gegeben hat.

Nach kurzer Durchsicht der Notizen werden die „Missverständnisse“ angesprochen und Probleme in der Vorstellung gelöst.

Zentral wird dokumentiert, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=0$ ist ($q\in\mathbb{N}^*$). Einem wachen Auge wird nicht entgangen sein, dass in dem Gedankenexperiment nur natürliche Zahlen als Potenzen berücksichtigt wurden. Deshalb ist ein Hinweis nötig, dass der Sachverhalt ebenso für Potenzen aus $\mathbb{R}$ gilt.

Letztlich bleibt nur noch die Frage, was die Folge mit unserer Exponentialfunktion $f(x)=b^x \quad (0<b<1)$ zu tun hat. Daher wird den Schülerinnen und Schülern zu dieser Frage ein Arbeitsauftrag (Folie Exponentialfunktionen.Globales_Verhalten.Arbeitsauftrag.01.Folie.pdf) gegeben:

Finden Sie einen Zusammenhang zwischen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=0,\ q\in\mathbb{N}^*$ und $f_b(x)=b^x,\ 0<b<1$.

Da $0<b<1$ auch für $\frac{1}{q}$ $(q\in\mathbb{N})$ gilt, kann für b der Wert $\frac{1}{q}$ eingesetzt werden $f_{\frac{1}{q}}(x)=\left(\frac{1}{q}\right)^x$. Die Funktion liefert die Gleichen Werte, für die die Grenzwertbetrachtung statt findet: $0=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty} f_{\frac{1}{q}}(n)$

Ziehen Sie eine Schlussfolgerung aus dem Zusammenhang.

Damit gilt $x\to\infty \ \Rightarrow\ f_b(x)=b^x\to 0,\ 0<b<1$

2. Ist Vorwissen zu Potenzfunktionen mit negativen Exponenten vorhanden, so lässt sich an dieser Stelle eine Brücke bauen und aus dem Vorwissen ableiten, welche Konsequenzen sich für den Verlauf des Graphen von f_b ergibt. Der Begriff der Asymptote wird wieder aufgegriffen.

Ist dieses Vorwissen nicht vorhanden, so bietet sich wieder ein Gedankenexperiment an, bei dem sich die Schülerinnen und Schüler zu jedem Funktionswert einen Balken vorstellen, dessen Höhe dem Funktionswert entspricht. Diese Balken werden mit zunehmenden x-Werten immer niedriger, bleiben aber immer höher als 0 LE (Schlussfolgerung aus der ersten Unterrichtsphase). Der Graph von f_b verläuft immer an den oberen Balkenenden, d.h. er fällt immer weiter, bleibt aber immer oberhalb der x-Achse.

Der Begriff der Asymptoten wird entsprechend eingeführt.

3. Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag (Folie Exponentialfunktionen.Globales_Verhalten.Arbeitsauftrag.02.Folie.pdf), mit der gleichen Vorgehensweise das Verhalten von $f_b(x)=b^x$, $1<b$ für $x \rightarrow \infty$ zu untersuchen.
4. In einer Übungsphase (Exponentialfunktionen.Globales_Verhalten.Aufgaben.pdf) wird des Erlernte gefestigt und mit anderen Themen wie vertikales Verschieben von Funktionsgraphen verknüpft.