Lösungen zu Aufgaben zu Exponentialfunktionen

Exponentiell oder nicht?

a) $\frac{9}{4} \div \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \ \frac{27}{8} \div \frac{9}{4} = \frac{3}{2}, \ \frac{81}{16} \div \frac{27}{8} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ die Folge folgt einem exponetiellen Wachstum mit $q = \frac{3}{2}$

b) $\frac{7200}{1200} = 6, \ \frac{43200}{7200} = 6, \ \frac{259200}{43200} = 6$

$\Rightarrow$ die Folge folgt einem exponetiellen Wachstum mit $q = 6$

c) $\frac{372{,}66}{172{,}13} \approx 2{,}16, \ \frac{573{,}19}{372{,}66} \approx 1{,}54, \ \frac{773{,}72}{573{,}19} \approx 1{,}35$

$\Rightarrow$ die Folge folgt keinem exponentiellen Wachstum/Zerfall

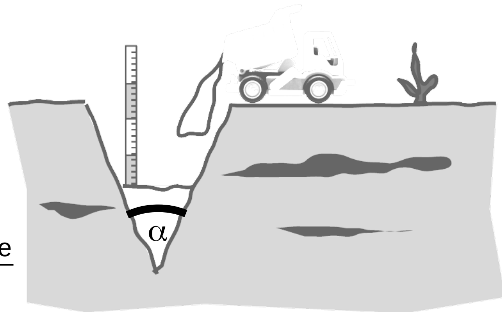
d) $\frac{\sqrt{2}}{2} \div \frac{1}{2} = \sqrt{2}, \ 1 \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \ \sqrt{2} \div 1 = \sqrt{2}, \ \sqrt{2} \div \frac{\sqrt{2}}{4} = 4$ ⚡

$\Rightarrow$ die Folge folgt keinem exponentiellen Wachstum/Zerfall

e) Kann mit einer Exponentialfunktion modelliert werden, da die stündliche Änderung der Zellkultur ein Faktor ist.

f) Kann nicht durch eine Exponentialfunktion modelliert werden, da das Volumen der Sandmenge in der Grube sich mit $V_{\text{Sand}} = \frac{l_{\text{Grube}} \cdot b_{\text{Sandoberfläche}} \cdot h_{\text{Füllung}}}{2}$ nach $h_{\text{Füllung}}$ umgestellt ergibt das:

(1) $h_{\text{Füllung}} = \frac{2}{l_{\text{Grube}} \cdot b_{\text{Sandoberfläche}}} \cdot V_{\text{Sand}}$



Außerdem ist

$\frac{\tan(\alpha)}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot b_{\text{Sandoberfläche}}}{h_{\text{Füllhöhe}}} \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{b_{\text{Sandoberfläche}}}{h_{\text{Füllhöhe}}}$

$\Leftrightarrow h_{\text{Füllhöhe}} \cdot \tan(\alpha) = b_{\text{Sandoberfläche}}$

in (1) eingesetzt:

$h_{\text{Füllung}} = \frac{2}{l_{\text{Grube}} \cdot h_{\text{Füllung}} \cdot \tan(\alpha)} \cdot V_{\text{Sand}} \Rightarrow h^2_{\text{Füllung}} = \frac{2}{l_{\text{Grube}} \cdot \tan(\alpha)} \cdot V_{\text{Sand}}$

$\Leftrightarrow h_{\text{Füllung}} = \sqrt{\frac{2}{l_{\text{Grube}} \cdot \tan(\alpha)} \cdot V_{\text{Sand}}}$

Damit ist gezeigt, dass zwischen Füllhöhe und eingefülltem Volumen kein exponentieller Zusammenhang besteht.

g) Kann mit einer Exponentialfunktion modelliert werden, da sich der Wert des Fahrzeugs um den Faktor 1/3 reduziert.

Exponentialfunktionen bestimmen

a) $\frac{2187}{729}=3 \;\wedge\; a=\frac{729}{3^6}=\frac{729}{729}=1 \;\Rightarrow\; f(x)=3^x$

Alternativ:

$f(6)=a\cdot b^6=726 \;\wedge\; f(7)=a\cdot b^7=2187 \;\Rightarrow\; \frac{2187}{b^7}\cdot b^6=726 \;\Rightarrow\; b=\frac{2187}{729}=3$

$\Rightarrow\; a\cdot 3^6=726 \;\Rightarrow\; a=\frac{726}{3^6}=\frac{726}{726}=1 \;\Rightarrow\; f(x)=3^x$

b) $\frac{2048}{512}=4 \;\wedge\; a=\frac{512}{4^5}=\frac{512}{1024}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{2}\cdot 4^x$

Alternativ:

$f(5)=a\cdot b^5=512 \;\wedge\; f(6)=a\cdot b^6=2048 \;\Rightarrow\; \frac{2048}{b^6}\cdot b^5=512 \;\Rightarrow\; b=\frac{2048}{512}=4$

$\Rightarrow\; a\cdot 4^5=512 \;\Rightarrow\; a=\frac{512}{4^5}=\frac{512}{1024}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{2}\cdot 4^x$

c) $f(3)=a\cdot b^3=25 \;\wedge\; f(5)=a\cdot b^5=625 \;\Rightarrow\; \frac{25}{b^3}\cdot b^5=625 \;\Rightarrow\; b^2=\frac{625}{25}=25 \;\Rightarrow b=5$

$\Rightarrow\; a\cdot 5^3=25 \;\Rightarrow\; a=\frac{25}{5^3}=\frac{25}{125}=\frac{1}{5} \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{1}{5}\cdot 5^x$

d) $f(4)=a\cdot b^4=800 \;\wedge\; f(8)=a\cdot b^8=\frac{32}{25} \;\Rightarrow\; \frac{800}{b^4}\cdot b^8=\frac{32}{25} \;\Rightarrow\; b^4=\frac{32}{25\cdot 800}=\frac{1}{625} \;\Rightarrow b=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow\; a\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4=800 \;\Rightarrow\; a=800\cdot 625=500.000 \;\Rightarrow\; f(x)=500.000\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x$

e) $f(0{,}2)=a\cdot b^{0{,}2}=0{,}3 \;\wedge\; f(0{,}6)=a\cdot b^{0{,}6}=0{,}003$

$\Rightarrow\; \frac{0{,}3}{b^{0{,}2}}\cdot b^{0{,}6}=0{,}003 \;\Rightarrow\; b^{0{,}4}=b^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{b^2}=\frac{0{,}003}{0{,}3}=0{,}01 \;\Rightarrow b=0{,}00001$

$\Rightarrow\; a\cdot(0{,}00001)^{0{,}2}=0{,}3 \;\Rightarrow\; a=\frac{0{,}3}{0{,}1}=3 \;\Rightarrow\; f(x)=3\cdot(0{,}00001)^x$

Modellieren

a) $w(b)=2^b,\; b\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\; w(16)=65.536,\; w(32)=4.294.967.296,\; w(64)=18.446.744.073.709.551.616$

b) Je Monat verkleinert sich die Fläche um 18 % $\Rightarrow\; q=0{,}82$

Startwert $a=12.000$, damit ergibt sich als Funktionsgleichung: $f(t)=12.000\cdot 0{,}82^t$, $t\in\mathbb{R}_+$, t in Monaten. Der einfachheitshalber nehmen wir an, dass ein Jahr 365 Tage hat. Daraus ergibt sich im Mittel 30,4 Tage pro Monat und es ist $\frac{t_{\text{Tage}}}{30{,}4}=t_{\text{Monate}}$

$$h(t_{\text{Tage}})=f\left(\frac{t_{\text{Tage}}}{30{,}4}\right)=12.000\cdot 0{,}82^{\frac{t_{\text{Tage}}}{30{,}4}}=12.000\cdot\left(0{,}82^{\frac{1}{30{,}4}}\right)^{t_{\text{Tage}}}\approx 12.000\cdot 0{,}9935^{t_{\text{Tage}}}$$