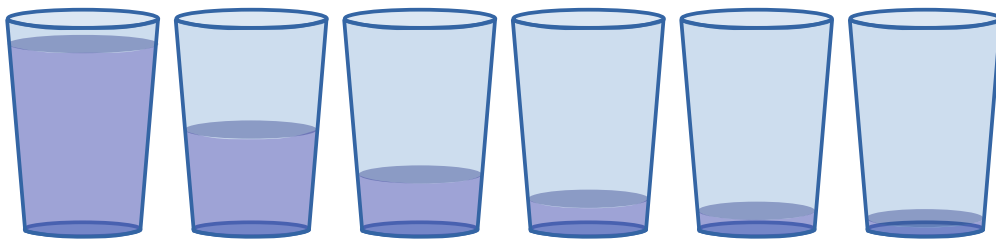


## Einführung

### Das Experiment

---

1. Ein Glas ist mit 200 ml Flüssigkeit gefüllt.
2. Aus dem Glas wird die Hälfte der Flüssigkeit entnommen
3. Danach wird wiederum die Hälfte von dem, was noch im Glas übrig ist entnommen.
4. Diese Prozedur wird von nun an immer wiederholt.



### Wie viel ist noch im Glas?

---

Folgende Tabelle zeigt den Zusammenhang zwischen Anzahl  $i \in \mathbb{N}$  der Entnahmen und der verbleibende Flüssigkeitsmenge  $k_i$  im Glas :

Anzahl Entnahmen	verbleibende Flüssigkeitsmenge
0	$k_0 = 200 \text{ ml}$
1	$k_1 = \frac{1}{2} \cdot k_0 = 100 \text{ ml}$
2	$k_2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot k_0 \right) = 50 \text{ ml}$
3	$k_3 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot k_0 \right) \right) = 25 \text{ ml}$

...

$k_0$  ist der Start-/Anfangswert

$\frac{1}{2}$  ist der Wachstumsfaktor (meistens mit  $q$  bezeichnet)

Mit der Funktion  $f(x) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $x \in \mathbb{N}$  kann für eine bestimmte Anzahl von Entnahmen die verbleibende Flüssigkeitsmenge im Glas berechnet werden.



# Exponentialfunktionen

## Geht es auch kontinuierlich?

Der Definitionsbereich im Experiment beschränkte sich auf  $\mathbb{N}$ . Da stellt sich die Frage, ob er sich im allgemeinen auch auf  $\mathbb{R}$  erweitern lässt. Dazu muss geklärt werden, was unter einer Potenz mit irrationalem Exponenten zu verstehen ist. Aber der Reihe nach.

### Die Potenz

Unter einer Potenz verstehen wir

$$(1) \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}, n \in \mathbb{Z}$$

es gelten Potenzgesetze wie z.B.

$$(2) \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

### Exponent aus $\mathbb{Q}$

Aus der Definition (1) ist nicht ersichtlich, wie sich  $a^{\frac{1}{2}}$  berechnen ließe. Nehmen wir an, das für rationale Exponenten ebenfalls die Potenzgesetze gelten, dann würde sich mit (2) folgendes ergeben:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a, \text{ was soviel bedeutet wie } \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a. \text{ Dann können wir } a^{\frac{1}{2}} := \sqrt{a} \text{ definieren.}$$

Im Fall

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a, \text{ was soviel bedeutet wie } \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a, \text{ können wir } a^{\frac{1}{3}} := \sqrt[3]{a} \text{ definieren.}$$

Und allgemein:

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{n\text{-mal}} = a^{\overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}^{n\text{-mal}}} = a \Rightarrow \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a \text{ und es wird } a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \text{ definiert.}$$



# Exponentialfunktionen

## Exponent aus $\mathbb{R}$

Wie ließe sich z.B.  $a^\pi$  (irrationaler Exponent) berechnen?

Dazu wird eine sogenannte Folge „gebaut“

$$\underbrace{3.0}_{=q_0}, \underbrace{3.1}_{=q_1}, \underbrace{3.14}_{=q_2}, \underbrace{3.141}_{=q_3}, \underbrace{3.1415}_{=q_4}, \dots$$

Jedes Glied dieser Folge enthält eine Dezimalstelle von  $\pi$  mehr, als das vorhergehende Glied.

Da alle Glieder der Folge eine endliche Anzahl von Dezimalstellen (Nachkommastellen) besitzen gilt:  $q_i \in \mathbb{Q}$

Damit kann für jedes  $q_i$  die Potenz  $a^{q_i}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) berechnet werden.

Da  $\pi$  unendlich viele Dezimalstellen hat, ist die Folge unendlich lang und die Glieder nähern sich immer mehr dem Wert von  $\pi$  an:  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_i = \pi$

Es kann gezeigt werden, dass dann auch der Grenzwert  $\lim_{i \rightarrow \infty} a^{q_i}$  existiert und es wird

definiert, dass  $a^\pi := \lim_{i \rightarrow \infty} a^{q_i}$

Für jede andere irrationale Zahl  $r$  wird genauso vorgegangen.

## Die Exponentialfunktion

---

$$f(x) = a \cdot q^x, \quad q > 0 \wedge x \in \mathbb{R}$$

heißt **Exponentialfunktion**.

