

Schnittpunkte

Unterrichtsplanung

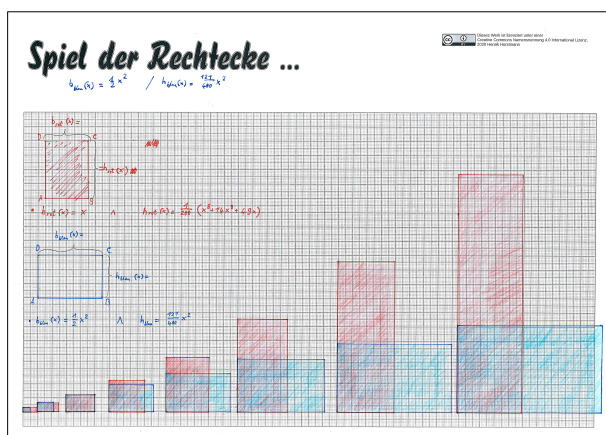
Dauer: 180 Minuten
 Material: Folien mit Arbeitsaufträgen
 Arbeitsblätter DIN A3 (Millimeterpapier)
 leer DIN A3 Blätter für Poster
 Aufgabenblätter
 Arbeitsblätter zur Intervallschachtelung

1. Die Schülerinnen und Schüler erhalten den Auftrag (Folie 1) auf das Millimeterpapier eine „Reihe“ von Rechtecken zu zeichnen:

blaue Rechtecke	rote Rechtecke
$b_{\text{blau}}(x) = \frac{1}{2}x^2 \wedge h_{\text{blau}}(x) = \frac{121}{400}x^2$	$x \in \mathbb{R}^* \quad b_{\text{rot}}(x) = x \wedge h_{\text{rot}}(x) = \frac{1}{200}(x^5 + 14x^3 + 49x)$

- ◆ $x \in \{1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5\}$
- ◆ Für jeden x Wert sollen das blaue und rote Rechteck übereinander gezeichnet werden, so dass die Ecken A aufeinander liegen.

Das Ergebnis sollte in etwa so aussehen:



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).
 2020 Henrik Horstmann

Um Zeit zu sparen, könnte den Schülerinnen und Schülern auch das fertige Bild gezeigt werden. Allerdings bin ich der Meinung, dass durch das selbstständige Zeichnen den Schülerinnen und Schülern sich die Entwicklung der Rechtecke besser erschließt.

- Im nächsten Schritt sollen sich die Schülerinnen und Schüler jeder für sich alles notieren, was sie aus dem Bild herauslesen können (Interpretation) (Folie 2).

Dies könnte z.B. sein:

- ◆ blaues und rotes Rechteck haben für $x=2$ die gleiche Höhe, Breite und Flächeninhalt.
- ◆ Bis $x=2$ ist der Flächeninhalt des blauen Rechtecks kleiner als die des roten. Danach ist es bis ca. $x=3,5$ genau umgekehrt.
- ◆ Für $x \leq 2,5$ ist das rote Rechteck breiter als hoch, ab $x \geq 3$ ist das rote Rechteck breiter als hoch.
- ◆ ...

Die Längen und Breiten der Rechtecke nimmt bei beiden Farben zu und somit auch der Flächeninhalt. Der Flächeninhalt des roten Rechtecks steigt ~~steigern~~ ~~nimmt schneller zu~~, ~~am~~ ~~als~~ ~~der~~ ~~blau~~ ~~steigt~~.

Zu rot:

- Breite steigt linear
- Höhe wird immer größer
- Flächeninhalt wird größer

Zu blau:

- Breite steigt an
- Höhe wird immer größer

Aus dem Bild kann:

Blau sieht aus, als würde es proportional wachsen.
Rot wird von liegendem Rechteck über Quadrat zu stehendem Rechteck.

In dem 3. Punkt sind Rot und Blau gleich groß ($x=2$).
Blau behält seine Form bei und vergrößert sich nur.
Rot wird immer mehr zur Säule.

Die Breite von Rot ist gleich x (Breite steigt linear an).
~~Die Breite von Blau ist gleich x , da x quadratisch ist.~~
~~Das ist nicht so.~~

Zu rot:

- Breite steigt linear an
- Die Höhe steigt als Kurve an
- Anfangs ist die Form breiter als hoch, am Ende höher als breit
- Der Flächeninhalt steigt an $x \rightarrow \infty \Rightarrow A \rightarrow \infty$
- Der Wert für die Höhe, steigt deutlich schneller als die Breite.

Zu blau:

- Die breite steigt an, wie... keine Abnahme.
- Die Höhe steigt als Kurve an
- Die Form sind immer breiter als hoch.
- Der Flächeninhalt steigt an $x \rightarrow \infty \Rightarrow A \rightarrow \infty$

Beides:

- Anfangs hat rot den doppelten Inhalt zu Blau, bei $x=2$ sind beide identisch, und bis $x=4,5$ ist rot wieder um einiges größer als blau.
- $x \rightarrow \infty \Rightarrow$ überlappende Fläche $\rightarrow \infty$



In einer Murmelfase tauschen sich die jeweils zwei Sitznachbarn miteinander aus. Die Ergebnisse werden im Plenum gesammelt und kurz diskutiert.

3. Im dritten Schritt überlegen sich die Schülerinnen und Schüler eine Frage zu den Rechtecken, die ihre Neugierde weckt (Folie 3). Dies ist eine sehr offene Aufgabe aber dennoch zielorientiert, wie unter Punkt 4 zu sehen ist. Dahinter verbirgt sich die Idee, dass die Schülerinnen und Schüler einer Frage nachgehen, die sie wirklich interessiert. Dadurch ist eine hohe Motivation für die Auseinandersetzung mit der Thematik zu erwarten. Konsequenterweise muss die Aufgabe aber so gestellt sein, dass bei keinerlei Interesse auch keine Frage notiert wird.

Alle Schülerinnen und Schüler gehen anschließend im Raum umher und tauschen sich über ihre Fragen aus. Dabei notieren sie sich die Namen derer, welche die gleiche oder eine sehr ähnliche Frage notiert haben.

Im Plenum werden die Fragen zusammengetragen und an der Tafel notiert. Es erfolgt eine Gruppeneinteilung entsprechend der Fragen.

Die Schülerinnen und Schüler, die sich bis zu diesem Zeitpunkt für keine Frage begeistern konnten haben nun noch die Möglichkeit eine der gestellten Fragen auszuwählen. Ob dies dann wirklich aus Interesse geschieht sei einmal dahin gestellt. Im Extremfall können auch Fragen zugewiesen werden. Eine Motivation wird sich dann jedoch leider nicht aus der Thematik heraus ergeben.

4. In den so eben eingeteilten Gruppen (zu große Gruppen können nochmals aufgeteilt werden) gehen die Schülerinnen und Schüler gemeinsam ihren Fragen nach (Folie 4).

Dies können unter anderem sein:

- a) Für welche x -Werte ist das blaue und rote Rechteck gleich groß?

$$h_{\text{blau}}(x) \cdot b_{\text{blau}}(x) = h_{\text{rot}}(x) \cdot b_{\text{rot}}(x)$$

Wer dieser Frage nachgeht stößt auf eine zu $4x^4 - 65x^2 + 196 = 0$ äquivalente Gleichung. Um die Frage abschließend beantworten zu können muss das Substitutionsverfahren bekannt sein. Wenn es nicht bekannt ist, müssen sich die Schülerinnen etwas anderes überlegen (z.B. graphische Lösung) um die Frage zu beantworten. Das Substitutionsverfahren kann dann später bei der Besprechung im Plenum eingeführt werden.



- b) Können blaues und rotes Rechteck gleich hoch sein?

$$h_{\text{blau}}(x) = h_{\text{rot}}(x)$$

Wer dieser Frage nachgeht stößt auf eine zu $2x^4 + 28x^2 - 121x + 98 = 0$ äquivalente Gleichung. In der Schulmathematik ist kein Werkzeug vorhanden um solche Gleichungen algebraisch nach x aufzulösen. Entweder ist bekannt, wie eine Gleichung näherungsweise gelöst wird oder die Schülerinnen und Schüler müssen sich etwas anderes überlegen (z.B. graphische Lösung). Auf das Problem kann in der späteren Besprechung angesprochen werden und gegebenenfalls ein Näherungsverfahren, wie z.B. die Intervallschachtelung eingeführt werden.

- c) Oder können blaues und rotes Rechteck gleich breit sein?

$$b_{\text{blau}}(x) = b_{\text{rot}}(x)$$

Um diese Frage beantworten zu können muss letztlich eine zu $x - \frac{x^2}{2} = 0$ äquivalente Gleichung gelöst werden. Hierzu ist lediglich die Kenntnis von einer einfachen Faktorisierung und dem Lösen von linearen Gleichungen nötig.

- d) Für welche x -Werte ist das rote Rechteck ein Quadrat?

$$h_{\text{rot}}(x) = b_{\text{rot}}(x)$$

Wer dieser Frage nachgeht stößt auf eine zu $x^4 + 14x^2 - 151 = 0$ äquivalente Gleichung. Hier gilt das gleiche wie für Frage a).

- e) Und für welche x -Werte ist das blaue Rechteck ein Quadrat

$$h_{\text{blau}}(x) = b_{\text{blau}}(x)$$

Wer dieser Frage nachgeht stößt auf eine zu $x^2 = 0$ äquivalente Gleichung. Es gibt somit kein x aus dem Definitionsbereich, für das das blaue Rechteck ein Quadrat ist.

Alle Fragen laufen letztendlich auf die Berechnung von Schnittpunkten von Funktionsgraphen hinaus. Es gibt allerdings auch Fragen, die dies nicht tun, wie z.B.



f) Wie entwickelt sich Flächengröße des blauen bzw. des roten Rechtecks?

Diese Frage lässt sich mit Hilfe des globalen Verhaltens von $h_{\text{blau}}(x) \cdot b_{\text{blau}}(x)$ bzw. $h_{\text{rot}}(x) \cdot b_{\text{rot}}(x)$ beantworten.

g) Gleiches gilt für die Frage nach der Entwicklung der Höhe bzw. Breite der Rechtecke.

h) Nimmt der Flächeninhalt irgendwann wieder ab und verschwindet sogar?

Hierzu ist eine Nullstellen Untersuchung von $h_{\text{blau}}(x) \cdot b_{\text{blau}}(x)$ bzw. $h_{\text{rot}}(x) \cdot b_{\text{rot}}(x)$ nötig.

Sollte eine Gruppe sich eine solche Frage herausuchen, kann entschieden werden, dass die Gruppe sich mit der Frage auseinander setzt. Auch wenn dies nicht zum Ziel der Schnittpunktberechnung führt, setzen sich die Schülerinnen und Schüler mit dem Sachverhalt in mathematischer Weise auseinander und das bei einer vermutlich hohen Motivation. Die Frage nach der Entwicklung von Flächen oder Seitenlängen dürften darüber hinaus zügig beantwortet sein, so dass sich die Gruppe noch einer weiteren Frage zuwenden kann.

Als Ergebnis der Arbeit erstellen die Schülerinnen und Schüler je Gruppe ein DIN A3 Poster, dass ihre Vorgehensweise und Ergebnisse dokumentiert.

5. Die Poster aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden im Klassenraum zu einem Marktplatz ausgehängt. Es wird nun Zeit gegeben den Marktplatz zu besuchen und sich mit der Arbeit der verschiedenen Gruppen vertraut zu machen (Folie 5).
6. Im Plenum werden Fragen diskutiert, die entweder aus der Arbeit in den Gruppen noch übrig sind oder sich beim Besuch des Marktplatzes ergeben haben
7. Die Fragen a) und b) werden zum Zweck der Dokumentation noch einmal aufgegriffen (falls diese Fragen nicht in den Gruppen bearbeitet wurden, werden sie einfach in den Raum gestellt). Die funktionale Beschreibung der Flächengrößen bzw. Rechteckhöhe wird thematisiert.

Dabei ergibt sich intuitiv folgende Argumentationskette: ist blaues und rotes Rechteck gleich groß, dann muss das Produkt der Seitenlängen des blauen Rechtecks gleich groß wie das Produkt der Seitenlängen des roten Rechtecks sein.



Mathematisch führt das zu $A_{blau}(x) = A_{rot}(x)$ mit $A_{blau}(x) = h_{blau}(x) \cdot b_{blau}(x)$ und $A_{rot}(x) = h_{rot}(x) \cdot b_{rot}(x)$. Es werden die Funktionsterme gleichgesetzt.

Auf der anderen Seite ist ein direkter Bezug zu dem Schaubild herzustellen, denn die Rechtecke sind an den Schnittstellen gleich groß.

Beim Lösen der Gleichungen sollte unbedingt auf die Interpretation der Ergebnisse geachtet werden. So sind negative Lösungen oder $x=0$ mathematisch auszuschließen, da sie nicht im Definitionsbereich liegen. Von der Sichtweise aus dem Kontext ergeben diese Lösungen keinen Sinn, da für $x=0$ keine Rechtecke existieren (Seitenlänge ist Null) und für negative Lösungen die Seitenlängen im Rechteck negativ wären.

Sollte das Substitutionsverfahren noch nicht bekannt sein, so ist jetzt ein guter Zeitpunkt es einzuführen. Da es sich hier um ein algorithmisches Lösungsverfahren handelt, erfolgt die Einführung als Vortrag. Zur Visualisierung, was bei eine Substitution geschieht, kann das x^2 in Geschenke verpackt werden. Es wird mit den Geschenken weiter gerechnet. Erst bei der Rücksubstitution wird das x^2 wieder aus dem Geschenk ausgepackt und mit dem x^2 weiter gerechnet (siehe Schnittpunkte.Wissen.pdf).

8. In einer Übungsphase (Aufgabenblatt) wird die Thematik der Schnittpunktberechnung von verschiedenen Seiten beleuchtet und gefestigt.
9. Nach der Übungsphase kann mit dem zweiten Beispiel, in dem es um die Entwicklung der Höhen geht, alle Erkenntnisse noch einmal in den Fokus genommen werden. Um die Betrachtungen in dieses Beispiel abschließen zu können, ist es nötig, eine Gleichung näherungsweise lösen zu können.

Sollte noch kein Näherungsverfahren bekannt sein, so ist jetzt ein guter Zeitpunkt eines einzuführen. Dazu schlage ich die Intervallschachtelung vor, das sie einfach zu verstehen ist und gut zeigt, wie durch Iterationen das Ergebnis immer genauer wird. Da es sich hier um ein algorithmisches Lösungsverfahren handelt, erfolgt die Einführung als Vortrag. Im Anschluss finden Übungen statt, in welchen die Schülerinnen und Schüler selbstständig die Intervallschachtelung anwenden.

