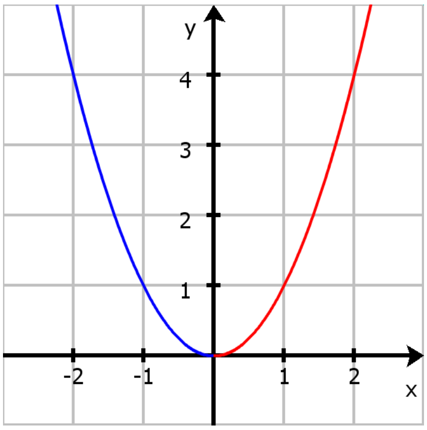
Monotonie



$f(x) = x^2$

$x < 0$: Die Funktionswerte nehmen mit zunehmenden Werten für x ab. Die Funktion ist für $x < 0$ *monoton fallend*.

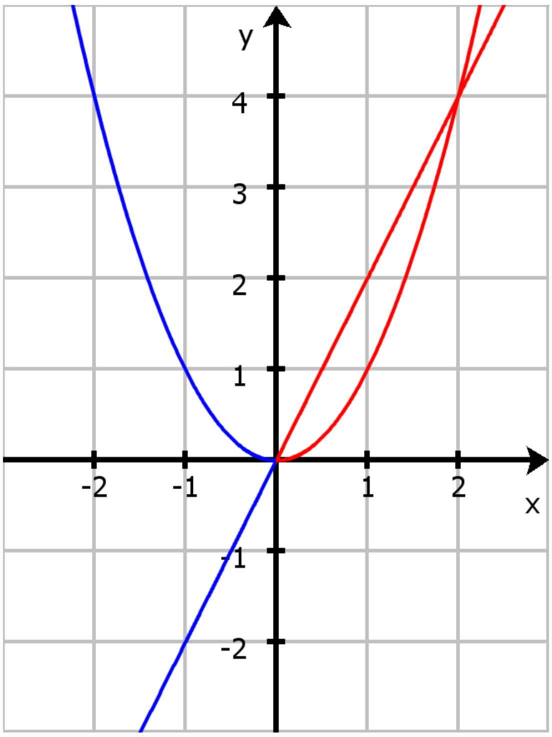
$x > 0$: Die Funktionswerte nehmen mit zunehmenden Werten für x zu. Die Funktion ist für $x > 0$ *monoton wachsend*.

Definition:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $\quad$ $f(x)$ ist monoton steigend

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$ $\quad$ $f(x)$ ist monoton fallend

Monotonie und die Ableitungsfunktion



$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$

$x < 0: \; f'(x) < 0$

$x > 0: \; f'(x) > 0$

Merke:

$f'(x) \geqslant 0$ die Funktion ist monoton steigend

$f'(x) \leqslant 0$ die Funktion ist monoton fallend

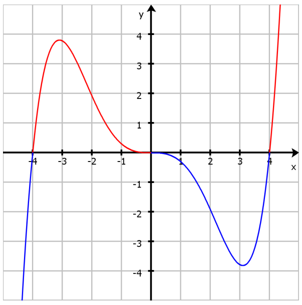
Aus dem Schaubild der Ableitungsfunktion läßt sich herauslesen, in welchen Bereichen die Funktion monoton steigend oder fallend ist:

In den Bereichen, in denen der Graph oberhalb der x-Achse verläuft, ist die Funktion monoton steigend.

In den Bereichen, in denen der Graph unterhalb der x-Achse verläuft, ist die Funktion monoton fallend.

An den Stellen, an denen $f'(x) = 0$ ist, besitzt die Funktion eine waagerechte Tangente.

Beispiele



Sei die dargestellte Kurve der Graph von $f'(x)$ der Funktion f.

a) Geben Sie die Bereiche an, an denen die Funktion monoton fällt, bzw. steigt.

b) Geben Sie die Stellen an, an denen der Graph von f waagerechte Tangenten besitzt.

Lösung:

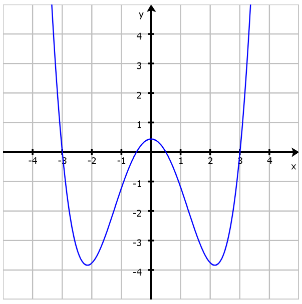
$x < -4$: f ist monoton fallend.

$-4 < x < 0$: f ist monoton steigend.

$0 < x < 4$: f ist monoton fallend.

$4 < x$: f ist monoton steigend.

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -4$, $x = 0$ und $x = 4$ waagerechte Tangenten.



Sei die dargestellte Kurve der Graph von $f'(x)$ der Funktion f.

a) Geben Sie die Bereiche an, an denen die Funktion monoton fällt, bzw. steigt.

b) Geben Sie die Stellen an, an denen der Graph von f waagerechte Tangenten besitzt.

Lösung:

$x < -3$: f ist monoton steigend.

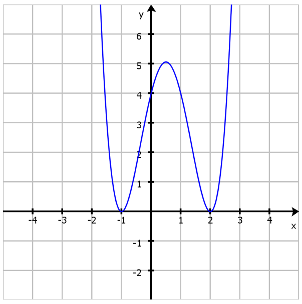
$-3 < x < -\frac{1}{2}$: f ist monoton fallend.

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$: f ist monoton steigend.

$\frac{1}{2} < x < 3$: f ist monoton fallend.

$3 < x$: f ist monoton steigend.

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -3$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = 3$ waagerechte Tangenten.



Sei die dargestellte Kurve der Graph von $f'(x)$ der Funktion f.

a) Geben Sie die Bereiche an, an denen die Funktion monoton fällt, bzw. steigt.

b) Geben Sie die Stellen an, an denen der Graph von f waagerechte Tangenten besitzt.

Lösung: für $-\infty < x < \infty$ ist f monoton steigend. Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -1$ und $x = 2$ waagerechte Tangenten.

Sei f eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x - 2$.

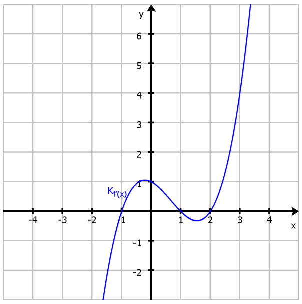
a) Geben Sie die Bereiche an, an denen die Funktion monoton fällt, bzw. steigt.

b) Geben Sie die Stellen an, an denen der Graph von f waagerechte Tangenten besitzt.

Lösung:

Bestimme die Ableitungsfunktion $f'(x)$, zeichne das Schaubild dazu und lese die Bereiche ab:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$



$x < -1$	:	f ist monoton fallend.
$-1 < x < 1$	:	f ist monoton steigend.
$1 < x < 2$	:	f ist monoton fallend.
$2 < x$	:	f ist monoton steigend.

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -1$, $x = 1$ und $x = 2$ waagerechte Tangenten.

Sei f eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{2}{5}x^5 + x^4 + \frac{17}{6}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{1}{3}$.

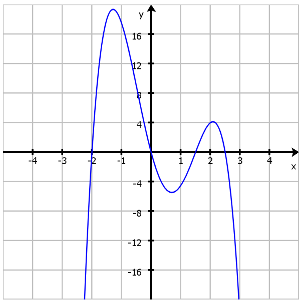
a) Geben Sie die Bereiche an, an denen die Funktion monoton fällt, bzw. steigt.

b) Geben Sie die Stellen an, an denen der Graph von f waagerechte Tangenten besitzt.

<u>Lösung:</u>

Bestimme die Ableitungsfunktion $f'(x)$, zeichne das Schaubild dazu und lese die Bereiche ab:

$$f'(x) = -2x^4 + 4x^3 + \frac{17}{2}x^2 - 15x$$



Lösungen können nicht aus dem Schaubild abgelesen werden $\Rightarrow$ Nullstellen der Ableitungsfunktion berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -2x^4 + 4x^3 + \frac{17}{2}x^2 - 15x &= 0 \quad \Big|\ x \text{ Ausklammern} \\ x\left(-2x^3 + 4x^2 + \frac{17}{2}x - 15\right) &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$x_1 = 0$ oder $-2x^3 + 4x^2 + \frac{17}{2}x - 15 = 0$

Setze $f(x)=0$:
Berechne die erste Nullstelle mit dem GTR und wende das Horner-Schema an:
$\Rightarrow x_2 = -2$

„alt“	x^3	x^2	x^1	x^0
	-2	4	$\frac{17}{2}$	-15
$x_2 = -2$		4	-16	15
	-2	8	$-\frac{15}{2}$	0
„neu“	x^2	x^1	x^0	

$\Rightarrow f(x) = (x+2)\left(-2x^2 + 8x - \frac{15}{2}\right)$

Setze $-2x^2 + 8x - \frac{15}{2} = 0$

$$-2x^2 + 8x - \frac{15}{2} = 0$$

Setze $a = -2,\ b = 8,\ c = -\frac{15}{2}$ in die Mitternachstformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{3,4} &= \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{15}{2}\right)}}{2 \cdot (-2)} \\
&= \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{-4} \\
&= \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{-4} \\
&= \frac{-8 \pm 2}{-4} \\
x_3 &= \frac{5}{2} \\
x_4 &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$x < -2$: f ist monoton fallend.

$-2 < x < 0$: f ist monoton steigend.

$0 < x < \frac{3}{2}$: f ist monoton fallend.

$\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$: f ist monoton steigend.

$\frac{5}{2} < x$: f ist monoton fallend.

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -2$, $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$ und $x = \frac{5}{2}$ waagerechte Tangenten.

Sei f eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{35}{4}x^4 - \frac{37}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{3}{2}$.

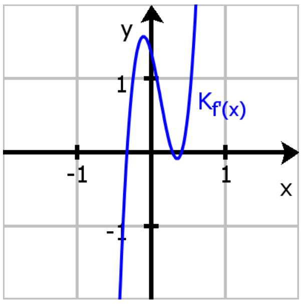
a) Geben Sie die Bereiche an, an denen die Funktion monoton fällt, bzw. steigt.

b) Geben Sie die Stellen an, an denen der Graph von f waagerechte Tangenten besitzt.

Lösung:

Bestimme die Ableitungsfunktion $f'(x)$, zeichne das Schaubild dazu und lese die Bereiche ab:

$$f'(x) = 35x^3 - \frac{37}{3}x^2 - 4x + \frac{4}{3}$$



Lösungen können nicht aus dem Schaubild abgelesen werden $\Rightarrow$ Nullstellen der Ableitungsfunktion berechnen:

$$35x^3 - \frac{37}{3}x^2 - 4x + \frac{4}{3} = 0$$

Berechne die erste Lösung mit dem GTR und wende das Horner-Schema an:

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{5}$$

„alt"	x^3	x^2	x^1	x^0
	35	$-\frac{37}{3}$	-4	$\frac{4}{3}$
$x_1 = \frac{2}{5}$		14	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$
	35	$\frac{5}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0
„neu"	x^2	x^1	x^0	

$$\Rightarrow \left(x - \frac{2}{5}\right)\left(35x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{10}{3}\right) = 0$$

Setze $35x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{10}{3} = 0$

$$35x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{10}{3} = 0$$

Setze $a = 35$, $b = \frac{5}{3}$, $c = -\frac{10}{3}$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{(2,\,3)} &= \frac{-\frac{5}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4 \cdot 35 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)}}{2 \cdot 35} \\
&= \frac{-\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{1400}{3}}}{70} \\
&= \frac{-\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{4225}{9}}}{70} \\
&= \frac{-\frac{5}{3} \pm \frac{65}{3}}{70} \\
x_2 &= \frac{2}{7} \\
x_3 &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ L = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{3} \right\}$$

$x < -1$	: f ist monoton fallend.
$-\frac{1}{3} < x < \frac{2}{7}$	: f ist monoton steigend.
$\frac{2}{7} < x < \frac{2}{5}$	: f ist monoton fallend.
$\frac{2}{5} < x$	: f ist monoton steigend.

Der Graph von f besitzt an den Stellen $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{7}$ und $x = \frac{2}{5}$ waagerechte Tangenten.