Differentialrechnung: Produktregel

f Ist eine Funktion mit $f(x)=u(x)\cdot v(x)$. u und v sind stetig und differenzierbar. Dann ist

	Umformungsschritt	Beschreibung
$f'(x_1)=$	$\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	Definition der Ableitung
$=$	$\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{u(x_2)v(x_2)-u(x_1)v(x_1)}{x_2-x_1}$	$f(x)$ durch $u(x)\cdot v(x)$ ersetzt
$=$	$\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{u(x_2)v(x_2)-u(x_1)v(x_1)+u(x_2)v(x_1)-u(x_2)v(x_1)}{x_2-x_1}$	$u(x_2)v(x_1)-u(x_2)v(x_1)$ ergänzt
$=$	$\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{u(x_2)v(x_2)-u(x_2)v(x_1)+u(x_2)v(x_1)-u(x_1)v(x_1)}{x_2-x_1}$	Reihenfolge der Summanden geändert
$=$	$\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{u(x_2)[v(x_2)-v(x_1)]+v(x_1)[u(x_2)-u(x_1)]}{x_2-x_1}$	Ausklammern
$=$	$\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{u(x_2)[v(x_2)-v(x_1)]}{x_2-x_1}+\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{v(x_1)[u(x_2)-u(x_1)]}{x_2-x_1}$	Anwendung der Grenzwertsätze
$=$	$\lim\limits_{x_2 \to x_1} u(x_2) \lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{v(x_2)-v(x_1)}{x_2-x_1}+v(x_1) \lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}$	Anwendung der Grenzwertsätze
$=$	$u(x_1)\cdot v'(x_1)+v(x_1)\cdot u'(x_1)$	Grenzwerte bestimmen

Produktregel

$u(x)$ und $v(x)$ sind Funktionen mit $x \in \mathbb{R}$. Beide Funktionen sind stetig und differenzierbar. Dann ist

$$(u(x)\cdot v(x))'=u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot v(x)$$