Schnittwinkel (1)

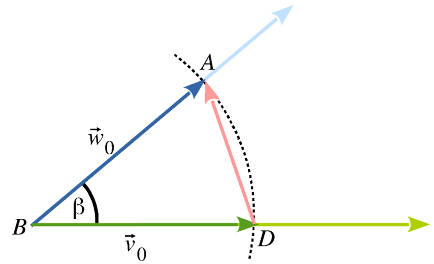
Tipp 1

Der Einheitsvektor $\vec{v}_0$
zu einem Vektor $\vec{v}$
berechnet sich wie folgt:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

Schnittwinkel (1)

Lösung 1



Da $0° < \beta < 90°$ kann in B kein rechter Winkel sein.

Wäre im Punkt A ein rechter Winkel, dann müsste die Seite durch A und D auf einer Tangente des Kreises liegen. Dies ist allerdings unmöglich, da D ebenfalls auf dem Kreis liegt.

Die Gleiche Argumentation gilt für den Punkt D.

Schnittwinkel (1)

Lösung 2

$$\cos(\beta)=\frac{\left|\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\vec{w}_0\right|}\underset{\substack{\vec{w}_0\\ \text{ist ein}\\ \text{Einheitsvektor}}}{=}\left|\overrightarrow{BC}\right|$$

Schnittwinkel (1)

Tipp 2

Die Länge der Strecke von C nach A kann mit Hilfe des Satz von Pythagoras berechnet werden.

Lösung 3

Schnittwinkel (1)

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{CA}\right| &= \sqrt{\left|\vec{w}_0\right|^2 - \left|\overrightarrow{BC}\right|^2} \\ &= \sqrt{1-(\cos(\beta))^2} \end{aligned}$$

Lösung 4

Schnittwinkel (1)

$$\left|\overrightarrow{CD}\right| = 1-\cos(\beta)$$

Schnittwinkel (1)

Lösung 5

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{w}_0-\vec{v}_0\right|^2 &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(w_{0_i}-v_{0_i}\right)^2}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(w_{0_i}-v_{0_i}\right)^2 \\
&= \left(\vec{w}_0-\vec{v}_0\right)^2
\end{aligned}
$$

Ein Beispiel: $\vec{w}_0=\begin{pmatrix}0,6\\0,8\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_0=\begin{pmatrix}0,96\\0,28\end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix}0,6\\0,8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,96\\0,28\end{pmatrix}\right|^2 &= \left(\sqrt{(0,6-0,96)^2+(0,8+0,28)^2}\right)^2 \\
&= (0,6-0,96)^2+(0,8+0,28)^2 \\
&= \left[\begin{pmatrix}0,6\\0,8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,96\\0,28\end{pmatrix}\right]^2
\end{aligned}
$$

Schnittwinkel (1)

Tipp 3

Da $\overrightarrow{DA}=-\vec{v}_0+\vec{w}_0=\vec{w}_0-\vec{v}_0$ ist und $\left(\vec{w}_0-\vec{v}_0\right)^2=\left|\vec{w}_0-\vec{v}_0\right|^2$, kann $\left(\vec{w}_0-\vec{v}_0\right)^2$ mit Hilfe des Satz von Pythagoras aus $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CD}$ berechnet werden.

Schnittwinkel (1)

Lösung 9

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{w}_0-\vec{v}_0\right)^2 &\underset{\text{Satz von Pythagoras}}{=} \left|\overrightarrow{CA}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2\\
&= \left(\sqrt{1-\left(\cos(\beta)\right)^2}\right)^2+\left(1-\cos(\beta)\right)^2\\
&= 1-\left(\cos(\beta)\right)^2+\left(1-\cos(\beta)\right)^2\\
&\underset{\text{2. binomische Formel}}{=} 1-\left(\cos(\beta)\right)^2\\
&\qquad +1-2\cos(\beta)+\left(\cos(\beta)\right)^2\\
&= 2-2\cos(\beta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{\text{2. binomische Formel}}{\Leftrightarrow}\quad \vec{w}_0{}^2-2\cdot\vec{w}_0\circ\vec{v}_0+\vec{v}_0{}^2 &= 2-2\cos(\beta)\\
\underset{\vec{w}_0 \text{ und } \vec{v}_0 \text{ sind Einheitsvektoren}}{\Leftrightarrow}\quad 2-2\cdot\vec{w}_0\circ\vec{v}_0 &= 2-2\cos(\beta)\\
\Leftrightarrow\quad -2\cdot\vec{w}_0\circ\vec{v}_0 &= -2\cos(\beta)\\
\Leftrightarrow\quad \vec{w}_0\circ\vec{v}_0 &= \cos(\beta)
\end{aligned}
$$