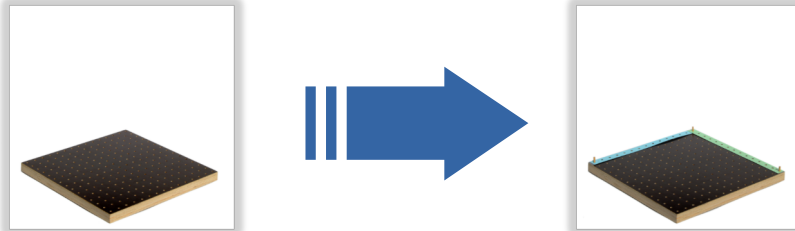


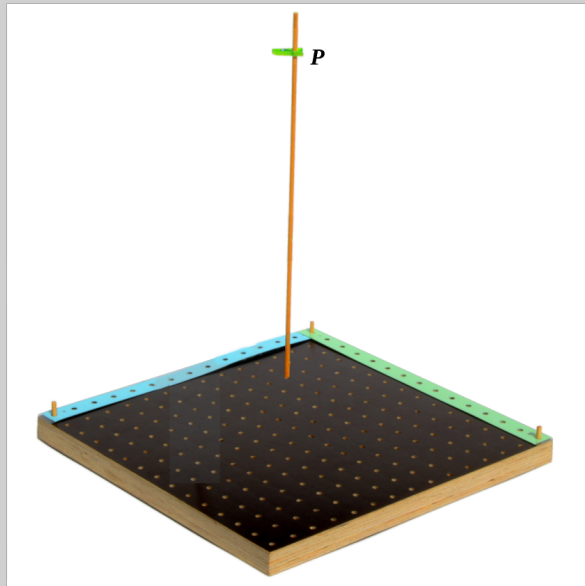
Abstand Punkt/Ebene (1)

Aufbau des 3D-Modells

Auf der Grundplatte ein Koordinatensystem festlegen (blau $\hat{=}$ x_1 , grün $\hat{=}$ x_2):



Markieren Sie einen beliebigen Punkt P im Raum, z.B. so:

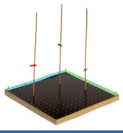


Forschungsauftrag (1)

- 1) Bestimmen Sie experimentell einen Punkt Q in der $x_1 x_2$ -Ebene, so dass der Abstand zwischen P und Q so minimal wie möglich ist. Begründen Sie schriftlich ihr Vorgehen.

Lösung 1



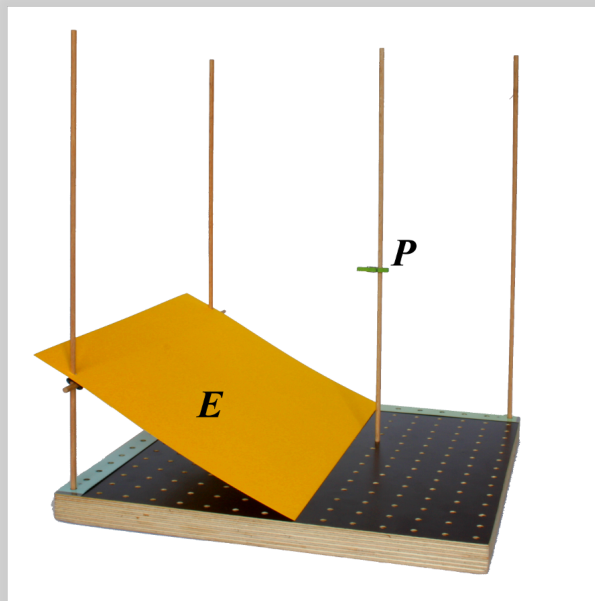


- 2) Beschreiben Sie die Lage der x_1x_2 -Ebene zur Geraden durch P und Q .

Lösung 2

Umbau des 3D-Modells

Fügen Sie in Ihr Modell die Ebene E mit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe eines Blatt Papiers ein und verschieben Sie P an die Koordinaten $(5 | 9 | 7)$.



Forschungsauftrag (2)

- 1) Ermitteln Sie mit Hilfe der Erkenntnisse aus dem Forschungsauftrag (1) die Koordinaten eines Punktes Q , so dass der Abstand zwischen P und Q minimal ist und Q in der Ebene E liegt.

Lösung 3

- 2) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g , die durch P und Q verläuft.

Tipp 1

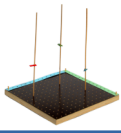
Lösung 4

- 3) Q ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E . Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten von Q .

Tipp 2

Lösung 5





- 4) Berechnen Sie die Länge von $\overrightarrow{PQ}$. Dies ist der (kürzeste) Abstand zwischen P und der Ebene E .

Lösung 6



Abstand leicht gemacht, bei Geraden

g ist eine Gerade mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, deren Stützvektor auf den Punkt $P = (5|-2|6)$

zeigt. Für $t=6$ liefert die Geradengleichung den Ortsvektor zum Punkt Q .

- 1) Bestimmen Sie die Koordinaten von Q .
- 2) Berechnen Sie den Abstand zwischen P und Q .
- 3) Begründen Sie, den sichtbaren Zusammenhang zwischen t und dem Abstand der Punkte P und Q .

Lösung 7



Lösung 8



Lösung 9



h ist eine Gerade mit $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, deren Stützvektor auf den Punkt $A = (2|4|-1)$

zeigt. Für $t=0,5$ liefert die Geradengleichung den Ortsvektor zum Punkt B .

- 4) Bestimmen Sie die Koordinaten von B .
- 5) Berechnen Sie den Abstand zwischen A und B .
- 6) Warum besteht der Zusammenhang zwischen t und dem Abstand der Punkte in diesem Fall nicht? Begründen Sie.
- 7) Geben Sie eine Gleichung für h an, bei der sich der Abstand zwischen A und eines weiteren Punktes direkt von t ablesen lässt (so wie bei der Geraden g).

Lösung 10



Lösung 11

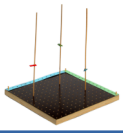


Lösung 12



Lösung 13





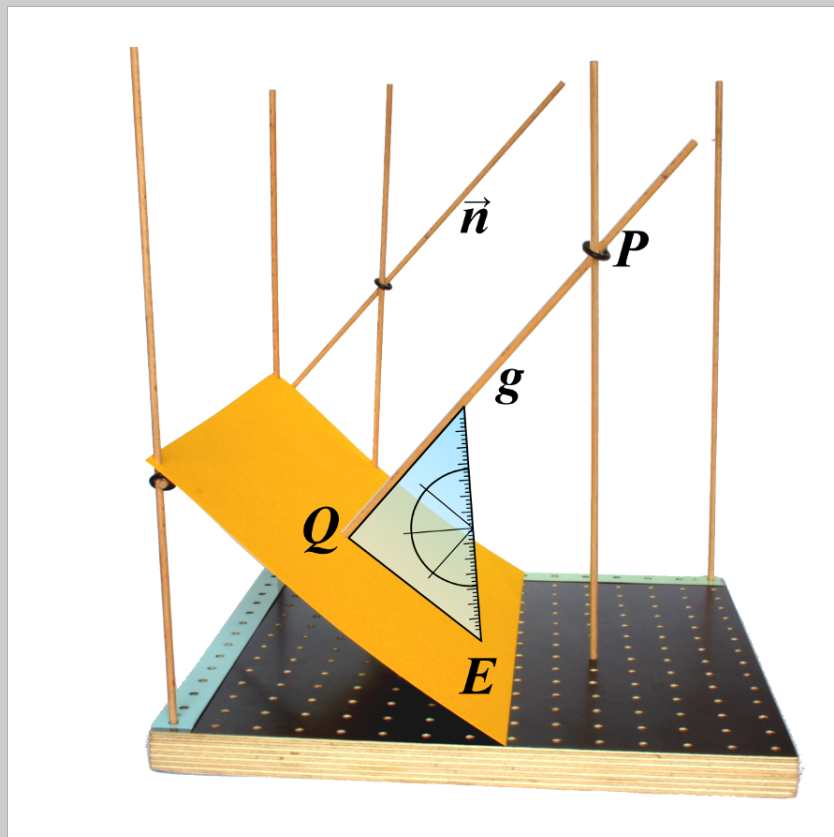
Umbau des 3D-Modells

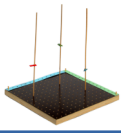
Fügen Sie in Ihr Modell die Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ mit Hilfe eines Blatt Papiers ein

und verschieben Sie P an die Koordinaten $(8 | 10 | 11)$.

Fügen Sie eine Gerade g in das Modell ein, so dass g durch P geht und senkrecht auf E steht.

Markieren Sie den Schnittpunkt von g und E mit Q .





Optimierung des Lösungswegs

- 1) Eine Gleichung zu g ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{n}$. Bestimmen Sie $\vec{n}$, so dass $\vec{n}$ ein Einheitsvektor¹ ist.

Lösung 14



- 2) Begründen Sie, dass E_n mit $E_n: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} = 0$ und E die selben Ebenen beschreiben.

Lösung 15



Definition: Ist der Normalenvektor in einer Ebenengleichung in Normalform ein Einheitsvektor, so heißt die Ebenengleichung **Hess'sche Normalform**.

- 3) Messen Sie im 3D-Modell den Abstand zwischen P und Q .

Lösung 16



- 4) Bestimmen Sie aus dem gemessenen Abstand und ohne Rechnung einen Wert für t , so dass $\vec{q} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{n}$.

Lösung 17



- 5) Um die Koordinaten von Q zu berechnen, wird der Term $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{n}$ in die

Ebenengleichung eingesetzt und nach t aufgelöst: $\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{n} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} = 0$

Beschreiben Sie in Worten, welche Umformungen mit jedem Schritt gemacht werden:

Lösung 18

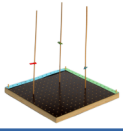


Term	Umformung
$\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{n} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} = 0$	
$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{n} \right] \circ \vec{n} = 0$	
$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} + t \cdot \vec{n}^2 = 0$	

Term	Umformung
$\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{n} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} = 0$	
$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{n} \right] \circ \vec{n} = 0$	
$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} + t \cdot \vec{n}^2 = 0$	

¹ Einheitsvektoren sind Vektoren mit der Länge 1.





Vektorgeometrie

6) Zeigen Sie, dass $\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} + t \cdot \vec{n}^2 = \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} + t$ ist und damit

$$\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} = -t \quad \text{bzw.} \quad \left| \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \vec{n} \right| = |t|.$$

7) Der Abstand von P zu E lässt sich somit mit $d = |t| = |(\vec{p} - \vec{s}) \cdot \vec{n}|$ berechnen. Woher kommen die Vektoren $\vec{p}$, $\vec{s}$ und $\vec{n}$?

