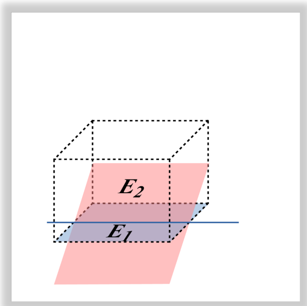
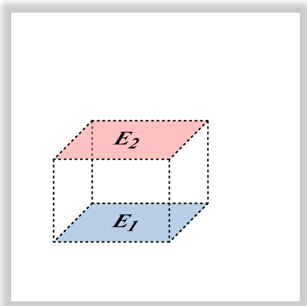
Gegenseitige Lage von Ebenen

$E_1:\ x_2+x_3=7$

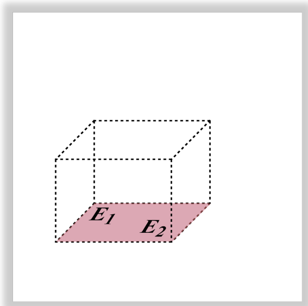
$E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$



E_1 und E_2
schneiden sich



E_1 und E_2
sind parallel



E_1 und E_2
sind identisch

Berechnung der Schnittgeraden

$E_1:\ a\cdot x_1+b\cdot x_2+c\cdot x_3=d$ ist die eine Ebene und $E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ ist die andere Ebene. $\begin{pmatrix}p_1+r\cdot u_1+s\cdot v_1\\p_2+r\cdot u_2+s\cdot v_2\\p_3+r\cdot u_3+s\cdot v_3\end{pmatrix}$ sind Ortsvektoren von Punkte in E_2. Setze den allgemeinen Ortsvektor in die Gleichung von E_1 ein um gemeinsame Punkte von E_1 und E_2 zu bestimmen: $a(p_1+r\cdot u_1+s\cdot v_1)+b(p_2+r\cdot u_2+s\cdot v_2)+c(p_3+r\cdot u_3+s\cdot v_3)=d$

und löse nach s auf. Abschließend den Term für s in die Gleichung von E_2 einsetzen und die Schnittgerade berechnen.

Beispiel:

$$E_1:\ x_2+x_3=7\ ,\ \ E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}2-3r-s\\4\\3+2r+s\end{pmatrix}$ in die Gleichung von E_1 einsetzen: $4+3+2r+s=7$

nach s auflösen: $7+2r+s=7\ \Rightarrow\ s=-2r$

in E_2 einsetzen: $\vec{x}=x=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}-2r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Schnittgerade von E_1 und E_2:

$$g:\ \vec{x}=x=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Die Gleichung und die Lage

Wenn die Gleichung $a(p_1+r\cdot u_1+s\cdot v_1)+b(p_2+r\cdot u_2+s\cdot v_2)+c(p_3+r\cdot u_3+s\cdot v_3)=d$ …

… bedeutet, dass s von r abhängig ist, dann schneiden sich die beiden Ebenen.

… falsch ist, dann sind die beiden Ebenen parallel.

… immer gilt, egal was für r und s eingesetzt wird, dann sind die beiden Ebenen identisch.