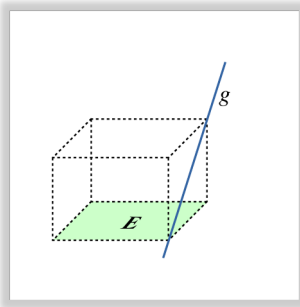


Gegenseitige Lage Ebene/Gerade

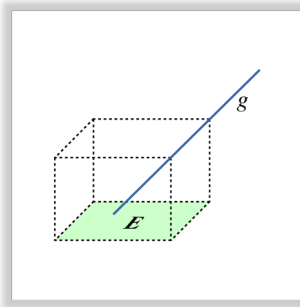
$$E: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$



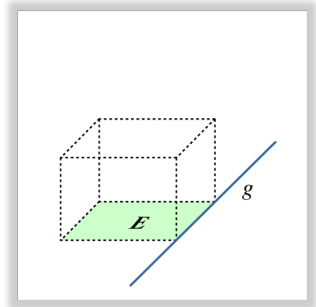
g schneidet E

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6,75 \end{pmatrix}$$



g ist parallel zu E
(liegt aber nicht in E)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -6,75 \end{pmatrix}$$



g liegt in E

Berechnung der Schnittpunkte

$$E: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40$$

und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3+r \\ 6 \\ 2+0,5r \end{pmatrix}$ in die Ebenengleichung einsetzen:

$$2(3+r) + 3 \cdot 6 + 4(2+0,5r) = 40 \Rightarrow 6 + 2r + 18 + 8 + 2r = 40 \Rightarrow 4r = 8 \Rightarrow r = 2$$

in $\vec{x}$ einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 6 \\ 2+0,5r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S(5|6|3)$

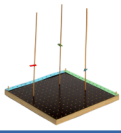
Es gibt **eine** Lösung $\Rightarrow$ es gibt genau einen Schnittpunkt.

und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6,75 \end{pmatrix} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9r \\ 11-6,75r \end{pmatrix}$ in die Ebenengleichung einsetzen:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 9r + 4(11-6,75r) = 40 \Rightarrow 27r + 44 - 27r = 40 \Rightarrow 44 = 40, \text{ was offensichtlich falsch ist, die Gleichung hat keine Lösung.}$$

Es gibt **keine** Lösung $\Rightarrow$ es gibt keine Schnittpunkte.





Vektorgeometrie

und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -6,75 \end{pmatrix} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9r \\ 3r \\ 10-6,75r \end{pmatrix}$ in die Ebenengleichung einsetzen:

$2 \cdot 9r + 3 \cdot 3r + 4(10 - 6,75r) = 40 \Rightarrow 18r + 9r + 40 - 27r = 40 \Rightarrow 40 = 40$ diese Gleichung stimmt für jedes $r \in \mathbb{R} \Rightarrow S(9r | 3r | 10 - 6,75r), r \in \mathbb{R}$

Es gibt **unendlich viele** Lösungen $\Rightarrow$ es gibt unendlich viele gemeinsame Punkte.

Ebenen in Parameterform

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -6,75 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6,75 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ebenengleichung: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 9r \\ 3r+9s \\ 10-6,75r-6,75s \end{pmatrix} \quad \text{Geradengleichung: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3+k \\ 6 \\ 2+0,5k \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittpunkt: } \begin{pmatrix} 9r \\ 3r+9s \\ 10-6,75r-6,75s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+k \\ 6 \\ 2+0,5k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 9r &= 3+k \\ 3r+9s &= 6 \\ 10-6,75r-6,75s &= 2+0,5k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 9r &- k &= 3 \\ 3r &+ 9s &= 6 \\ -6,75r &- 6,75s &- 0,5k = -8 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 9 & 0 & 6 \\ -6,75 & -6,75 & -0,5 & -8 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & \frac{1}{3} & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & \frac{1}{3} & 5 \\ 0 & -6,75 & -1,25 & -5,75 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow k=2 \wedge s=\frac{13}{27} (\approx 0,48) \wedge r=\frac{5}{9} (\approx 0,55)$$

Das LGS besitzt eine eindeutige Lösung $\Rightarrow$ es gibt einen Schnittpunkt

$k=2$ in die Gleichung von g einsetzen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 6 \\ 2+0,5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S(5|6|3)$$

Alternative: Parameterform von E in Koordinatenform umwandeln und dann den Schnittpunkt bestimmen.

