Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 1

$a_1, b_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$\wedge$

$a_2=0 \;\wedge\; a_3=0 \;\wedge\; b_1=0 \;\wedge\; b_3=0 \;\wedge\; c_1=0 \;\wedge\; c_2=0$

1

Spurpunkte / Spurgeraden

Tipp 1

Aus der vorhergehenden Aufgabe ist bekannt, dass

$a_2=0 \;\wedge\; a_3=0 \;\wedge\; b_1=0 \;\wedge\; b_3=0 \;\wedge\; c_1=0 \;\wedge\; c_2=0$

Setzen Sie

nacheinander die Koordinaten von S_1 , S_2 und S_3 in die Ebenengleichung ein und berechnen Sie die Koordinaten a_1, b_2, c_3

2

Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 2

$S_1 = (2|0|0) \ \wedge \ S_2 = (0|-6|0) \ \wedge \ S_3 = (0|0|-7)$

Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 3

Gerade g_1: wähle $\vec{p} = \overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für $\vec{r} = \overrightarrow{S_1 S_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$

Damit ist $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$

Gerade g_2: wähle $\vec{p} = \overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für $\vec{r} = \overrightarrow{S_1 S_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit ist $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$

Gerade g_3: wähle $\vec{p} = \overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für $\vec{r} = \overrightarrow{S_2 S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

Damit ist $g_3\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$

Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 4

Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 5

Spurpunkte:

$S_1=(3|0|0)$,

$S_2=(0|1|0)$,

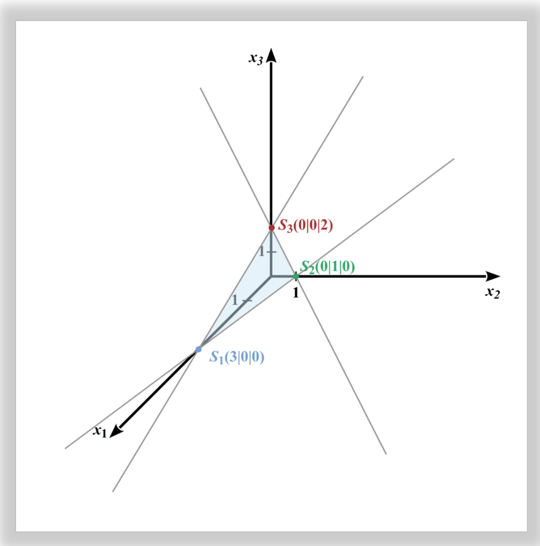
$S_3=(0|0|2)$

Spurgeraden:

$g_1\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$

$g_2\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$g_3\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$



Spurpunkte:

$S_1=(4|0|0)$,

$S_2=(0|-4|0)$,

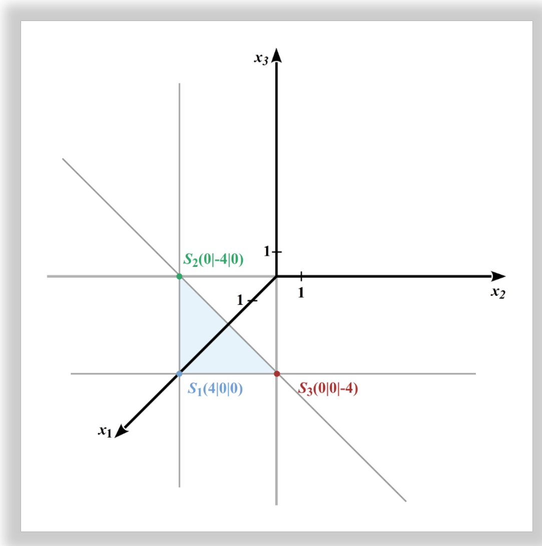
$S_3=(0|0|-4)$

Spurgeraden:

$g_1\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\end{pmatrix}$

$g_2\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$

$g_3\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}$



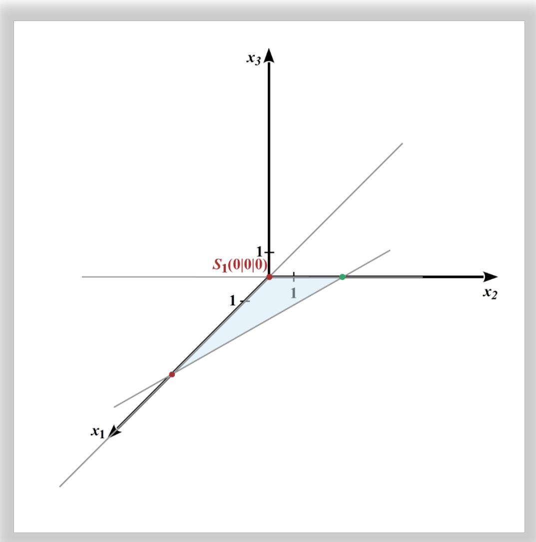
Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 6

Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 7

Spurpunkte:
$S=(a|0|0)$,
$S=(0|b|0)$
$a, b \in \mathbb{R}$
Spurgeraden: alle Geraden, die in der x_1x_2-Ebene liegen.



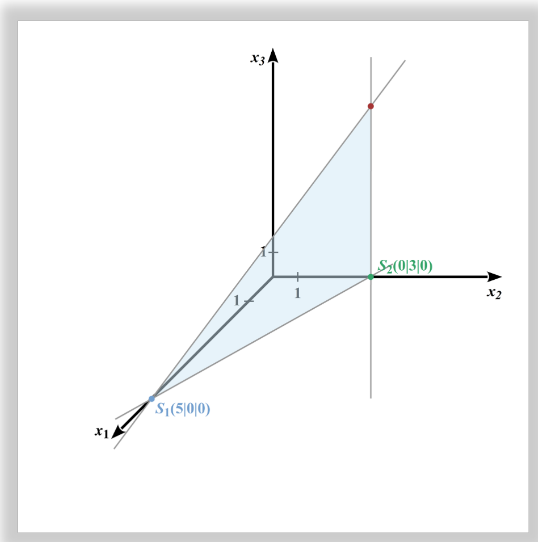
7

Spurpunkte:
$S_1=(5|0|0)$,
$S_2=(0|3|0)$
Spurgeraden:

$$g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

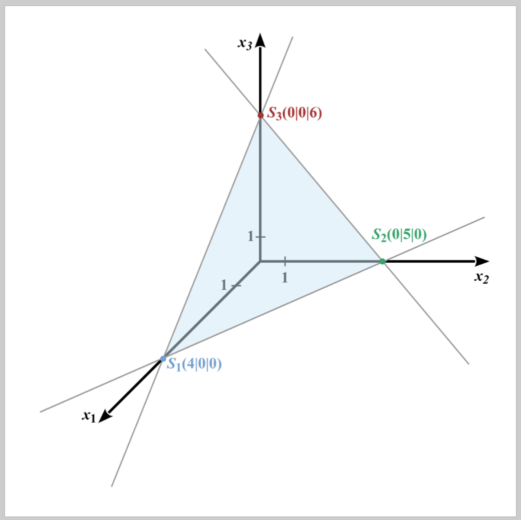


8

Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 8

$E\colon 15\,x_1 + 12\,x_2 + 10\,x_3 = 60$

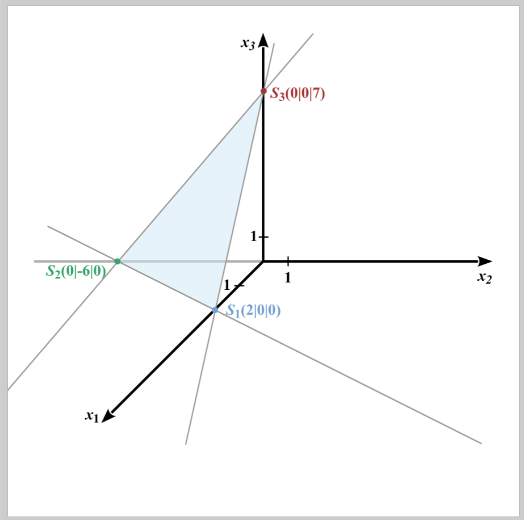


9

Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 9

$E\colon 21\,x_1 - 7\,x_2 + 6\,x_3 = 42$



10

Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 10

Wähle die Spurpunkte

$S_1=(4|0|0) \ \wedge \ S_2=(0|5|0) \ \wedge \ S_3=(0|0|6)$: dann ist

$$E: \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{5}x_2+\frac{1}{6}x_3=1$$

Überprüfen mit den Spurpunkten:

$$S_1: \frac{1}{4}4+\frac{1}{5}0+\frac{1}{6}0=1 \quad ✓$$

$$S_2: \frac{1}{4}0+\frac{1}{5}5+\frac{1}{6}0=1 \quad ✓$$

$$S_3: \frac{1}{4}0+\frac{1}{5}0+\frac{1}{6}6=1 \quad ✓$$

Spurpunkte / Spurgeraden

Tipp 2

Durch die drei Spurpunkte

$S_1=(a|0|0) \ \wedge \ S_2=(0|b|0) \ \wedge \ S_3=(0|0|c)$

ist E eindeutig bestimmt. Stellen Sie eine Parametergleichung für E auf und formen Sie diese dann in eine Koordinatengleichung um.

Spurpunkte / Spurgeraden

Lösung 11

$$S_1=(a|0|0) \;\wedge\; S_2=(0|b|0) \;\wedge\; S_3=(0|0|c)$$

sind die Spurpunkte von E, dann ist

$$E:\ \vec{x}=\overrightarrow{OS_1}+r\cdot\overrightarrow{S_1S_2}+s\cdot\overrightarrow{S_1S_3}\Rightarrow E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-a\\0\\c\end{pmatrix}$$

Normalenvektor $\vec{n}$ zu $\overrightarrow{S_1S_2}$ und $\overrightarrow{S_1S_3}$:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-a\\0\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}$$

$$E:\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}=0\Rightarrow(x_1-a)\cdot bc+x_2\cdot ac+x_3\cdot ab=0$$

$$\Rightarrow x_1\cdot bc-abc+x_2\cdot ac+x_3\cdot ab=0$$

$$\Rightarrow x_1\cdot bc+x_2\cdot ac+x_3\cdot ab=abc$$

$$\Rightarrow \frac{bc}{abc}x_1+\frac{ac}{abc}x_2+\frac{ab}{abc}x_3=\frac{abc}{abc}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}x_1+\frac{1}{b}x_2+\frac{1}{c}x_3=1$$

Damit gilt die Behauptung.

13