Von der Parameter- zur Koordinatenform

Normalenvektor Bestimmen

E ist eine Ebene mit der Gleichung $E\colon \vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$; $r,s\in\mathbb{R}$.

Suche den Normalenvektor zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

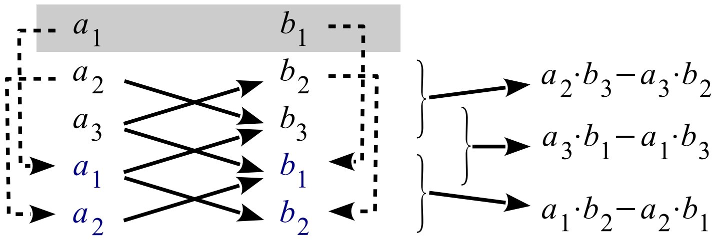
$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{n}$$

Kreuzprodukt Normalenvektor

Das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

Mit folgendem Schema lässt sich ganz leicht das Kreuzprodukt berechnen:



Normalengleichung Bestimmen

$\vec{n}$ ist der Normalenvektor zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Dann ist die Ebenengleichung in Normalform

$$E\colon (\vec{x}-\vec{p})\circ\vec{n}=0$$

Zur Koordinatengleichung

Durch Ausführen der Subtraktion und der Skalarmultiplikation in der Normalengleichung ergibt sich die Koordinatengleichung.

Beispiel

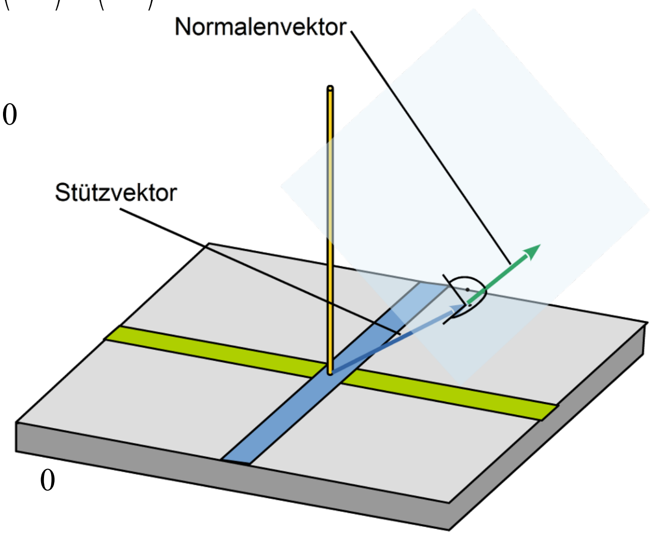
Ebenengleichung in Parameterform: $E\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix};\ r,s\in\mathbb{R}$

Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt berechnen:

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0\cdot 1-0\cdot(-1)=0 \\ 0\cdot 0-1\cdot 1=-1 \\ 1\cdot(-1)-0\cdot 0=-1 \end{array}$$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Normalengleichung: $E\colon \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=0$



Zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
&& \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} &= 0 \\
\Rightarrow && \begin{pmatrix}x_1-3\\x_2-5\\x_3-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} &= 0 \\
\Rightarrow && 5-x_2+4-x_3 &= 0 \\
\Rightarrow && 9-x_2-x_3 &= 0 \quad |-9 \\
\Rightarrow && -x_2-x_3 &= -9 \quad |\cdot(-1) \\
\Rightarrow && x_2+x_3 &= 9
\end{aligned}$$

Damit ist $x_2+x_3=9$ eine Koordinatengleichung der Ebene.