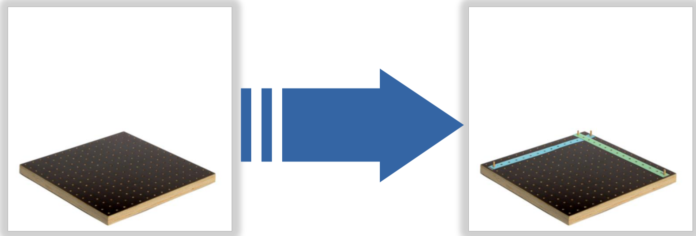
Ebenendarstellung umformen

Vorbereiten des 3D-Modells

Auf der Grundplatte ein Koordinatensystem mit folgenden Eigenschaften festlegen:

- blau $\hat{=}\, x_1$, grün $\hat{=}\, x_2$
- $-1 \leq x_1 \leq 13 \ \wedge -1 \leq x_2 \leq 13$



Forschungsauftrag

Es ist die Gleichung $(\vec{x}-\vec{p})\circ\vec{n}=0$ zu erforschen. Im folgenden ist $\vec{p}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

a) Setzen Sie für $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ in die Gleichung ein und vereinfachen Sie linke Seite der Gleichung soweit wie möglich.

Tipp 1

Lösung 1

b) Bestimmen Sie zehn verschiedene Vektoren $\vec{x}$, für die die Gleichung gilt. Betrachten Sie die berechneten Vektoren als Ortsvektoren und stellen Sie sie im Modell da. Welche Aussage können Sie zur Lage der Punkte machen?

Tipp 2

Lösung 2

c) In welchem Winkel stehen die Vektoren $\vec{x}-\vec{p}$ und $\vec{n}$?

Lösung 3

d) $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}$

Berechnen Sie einen Vektor $n=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$, der senkrecht auf E steht.

Tipp 3

Tipp 4

Lösung 4

Zusatzaufgabe

Bringen Sie die einzelnen Umformungsschritte in eine logische Reihenfolge:

$\vec{u}\cdot\vec{n}=0 \ \wedge \ \vec{v}\cdot\vec{n}=0$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \ \wedge \ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} u_1\cdot n_1+u_2\cdot n_2+u_3\cdot n_3 &= 0 \quad \left|\cdot v_1\right. \\ v_1\cdot n_1+v_2\cdot n_2+v_3\cdot n_3 &= 0 \quad \left|\cdot(-u_1)\right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} u_1\cdot v_1\cdot n_1+u_2\cdot v_1\cdot n_2+u_3\cdot v_1\cdot n_3 &= 0 \\ -u_1\cdot v_1\cdot n_1-u_1\cdot v_2\cdot n_2-u_1\cdot v_3\cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u_2\cdot v_1\cdot n_2-u_1\cdot v_2\cdot n_2+u_3\cdot v_1\cdot n_3-u_1\cdot v_3\cdot n_3=0$$

$$\Rightarrow \quad (u_2\cdot v_1-u_1\cdot v_2)\cdot n_2+(u_3\cdot v_1-u_1\cdot v_3)\cdot n_3=0$$

$$\Rightarrow \quad (u_2\cdot v_1-u_1\cdot v_2)\cdot n_2=(u_1\cdot v_3-u_3\cdot v_1)\cdot n_3$$

Wähle $n_2=(u_1\cdot v_3-u_3\cdot v_1) \ \wedge \ n_3=(u_2\cdot v_1-u_1\cdot v_2)$

$$\Rightarrow \quad u_1\cdot n_1+u_2\cdot(u_1\cdot v_3-u_3\cdot v_1)+u_3\cdot(u_2\cdot v_1-u_1\cdot v_2)=0$$

$$\Rightarrow \quad u_1\cdot n_1=-u_2\cdot(u_1\cdot v_3-u_3\cdot v_1)-u_3\cdot(u_2\cdot v_1-u_1\cdot v_2)$$

$$\Rightarrow \quad u_1\cdot n_1=-u_1\cdot u_2\cdot v_3+u_2\cdot u_3\cdot v_1-u_2\cdot u_3\cdot v_1+u_1\cdot u_3\cdot v_2$$

$$\Rightarrow \quad n_1=\frac{-u_1\cdot u_2\cdot v_3+u_2\cdot u_3\cdot v_1-u_2\cdot u_3\cdot v_1+u_1\cdot u_3\cdot v_2}{u_1}$$

$$\Rightarrow \quad n_1=u_2\cdot v_3-u_3\cdot v_2$$

Lösung 5