

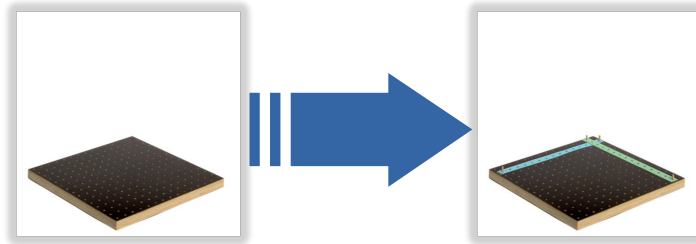


Ebenendarstellung umformen

Vorbereiten des 3D-Modells

Auf der Grundplatte ein Koordinatensystem mit folgenden Eigenschaften festlegen:

- ◆ blau $\hat{=}$ x_1 , grün $\hat{=}$ x_2
- ◆ $-1 \leq x_1 \leq 13 \wedge -1 \leq x_2 \leq 13$



Forschungsauftrag

Es ist die Gleichung $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$ zu erforschen. Im folgenden ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a) Setzen Sie für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ in die Gleichung ein und vereinfachen Sie die linke Seite

der Gleichung soweit wie möglich.

Tipp 1

Lösung 1

- b) Bestimmen Sie zehn verschiedene Vektoren $\vec{x}$, für die die Gleichung gilt.

Betrachten Sie die berechneten Vektoren

als Ortsvektoren und stellen Sie sie im Modell da.

Welche Aussage können Sie zur Lage der Punkte machen?

Tipp 2

Lösung 2

- c) In welchem Winkel stehen die Vektoren $\vec{x} - \vec{p}$ und $\vec{n}$?

Lösung 3

- d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}$

Berechnen Sie einen Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der senkrecht auf E steht.

Tipp 3

Tipp 4

Lösung 4





Zusatzaufgabe

Bringen Sie die einzelnen Umformungsschritte in eine logische Reihenfolge:

$$\vec{u} \circ \vec{n} = 0 \quad \wedge \quad \vec{v} \circ \vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow (u_2 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_2) \cdot n_2 = (u_1 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_1) \cdot n_3$$

$$\Rightarrow u_1 \cdot n_1 = -u_2 \cdot (u_1 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_1) - u_3 \cdot (u_2 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_2)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u_1 \cdot v_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot v_1 \cdot n_2 + u_3 \cdot v_1 \cdot n_3 &= 0 \\ -u_1 \cdot v_1 \cdot n_1 - u_1 \cdot v_2 \cdot n_2 - u_1 \cdot v_3 \cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot (u_1 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_1) + u_3 \cdot (u_2 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_2) = 0$$

$$\Rightarrow (u_2 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_2) \cdot n_2 + (u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3) \cdot n_3 = 0$$

$$\Rightarrow u_2 \cdot v_1 \cdot n_2 - u_1 \cdot v_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot v_1 \cdot n_3 - u_1 \cdot v_3 \cdot n_3 = 0$$

$$\Rightarrow u_1 \cdot n_1 = -u_1 \cdot u_2 \cdot v_3 + u_2 \cdot u_3 \cdot v_1 - u_2 \cdot u_3 \cdot v_1 + u_1 \cdot u_3 \cdot v_2$$

$$\text{Wähle } n_2 = (u_1 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_1) \quad \wedge \quad n_3 = (u_2 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_2)$$

$$\Rightarrow n_1 = u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 &= 0 & | \cdot v_1 \\ v_1 \cdot n_1 + v_2 \cdot n_2 + v_3 \cdot n_3 &= 0 & | \cdot (-u_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{-u_1 \cdot u_2 \cdot v_3 + u_2 \cdot u_3 \cdot v_1 - u_2 \cdot u_3 \cdot v_1 + u_1 \cdot u_3 \cdot v_2}{u_1}$$

