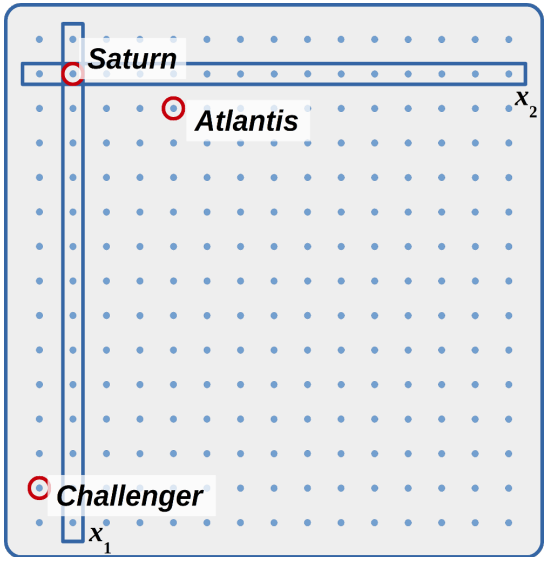
Lösung 1



Tipp 1

Neue Position der *Atlantis*: $Q'(1+3p|3+4p)$

Die Zurückgelegte Strecke ist somit:

$$|\overrightarrow{QQ'}|=\left|\begin{pmatrix}1+3p-1\\3+4p-3\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix}3p\\4p\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(3p)^2+(4p)^2}=\sqrt{9p^2+16p^2}=\sqrt{25p^2}=5|p|$$

Die *Atlantis* hat somit eine Strecke von $5|p|$km zurückgelegt.

Da die *Atlantis* sich mit einer Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ fortbewegt, ist sie an der Position Q' nach $\frac{5}{15}|p|=\frac{1}{3}|p|$Sekunden .

Lösung 2

Atlantis: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p \\ 4p \end{pmatrix}$

Da *Atlantis* $15\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ schnell ist

$$\Rightarrow \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3p \\ 4p \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(3p)^2+(4p)^2} = 15$$

$$\Rightarrow \sqrt{9p^2+16p^2} = \sqrt{25p^2} = \pm 5p = 15 \;\Rightarrow p = 3 \;\Rightarrow\; a_1 = 9 \wedge a_2 = 12$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung 3

Challenger: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} -1{,}25 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}25p \\ 3p \end{pmatrix}$

Da *Challenger* $13\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ schnell ist

$$\Rightarrow \left|\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1{,}25p \\ 3p \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1{,}25p)^2+(3p)^2} = 13$$

$$\Rightarrow \sqrt{1{,}5625p^2+9p^2} = \sqrt{10{,}5625p^2} = 3{,}25p = 13$$

$$\Rightarrow p = 4 \;\Rightarrow\; b_1 = -5 \wedge b_2 = 12$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung 4

Der Abstand der beiden Raumschiffe entspricht der Länge des Vektors von der *Atlantis* zur *Challenger*:

$$d(t)=\left|\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}12\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}\right]\right|=\left|\begin{pmatrix}-11\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}14\\0\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix}-11+14t\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-11+14t)^2+16}$$

$d(t)$ nimmt genau dann den kleinsten Wert an, wenn die Diskriminante den kleinsten Wert annimmt:

$$\bar{d}(t)=(-11+14t)^2+16=196t^2-308t+137$$

Die Raumschiffe kollidieren,
wenn ein $t\in\mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ 14t=11\wedge 0=-4$$

$\Rightarrow$ das LGS besitzt keine Lösung
$\Rightarrow$ die beiden Raumschiffe Kollidieren nicht.

Bestimme das absolute Minimum von $\bar{d}(t)$:

$$\bar{d}'(t)=392t-308\ \wedge\ \bar{d}''(t)=392$$

nach $\bar{d}'(t)=0\ \Rightarrow\ t=\frac{11}{14}\approx 0{,}77$ Sekunden

wird das absolute Minimum erreicht,
da $\bar{d}(t)$ eine nach oben geöffnete Parabel ist.
Der kleinste Abstand ist

$$d\left(\frac{11}{14}\right)=\frac{\sqrt{154}}{14}\approx 0{,}89\,\text{km}$$

Lösung 5

$$\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}+p_1\begin{pmatrix}1{,}5\\2{,}5\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\9\\8\end{pmatrix}+p_2\begin{pmatrix}1\\-0{,}4\\-\frac{\sqrt{7}}{5}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{aligned}1{,}5\,p_1-p_2&=-2\\2{,}5\,p_1+0{,}4\,p_2&=7\\\frac{1}{\sqrt{2}}p_1+\frac{\sqrt{7}}{5}p_2&=5\end{aligned}$$

Variante 1:

$$\begin{aligned}1{,}5\,p_1-p_2&=-2\\2{,}5\,p_1+0{,}4\,p_2&=7\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}0{,}6\,p_1-0{,}4\,p_2&=-0{,}8\\2{,}5\,p_1+0{,}4\,p_2&=7\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad 3{,}1\,p_1=6{,}2\quad\Rightarrow\quad p_1=2\quad\Rightarrow\quad p_2=5$$

aber

$$\frac{1}{\sqrt{2}}2+\frac{\sqrt{7}}{5}5=\sqrt{2}+\sqrt{7}\approx 4\neq 5$$

das LGS ist nicht lösbar

$\Rightarrow$ die beiden Flugbahnen schneiden sich nicht.

Variante 2:

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-1&-2\\\frac{5}{2}&\frac{2}{5}&7\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{7}}{5}&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-1&-2\\0&\frac{31}{15}&\frac{31}{3}\\0&\frac{\sqrt{7}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{3}&\frac{2\sqrt{2}}{3}+5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-1&-2\\0&\frac{31}{15}&\frac{31}{3}\\0&0&-\sqrt{7}-\sqrt{2}+5\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}1{,}5&-1&-2\\2{,}5&0{,}4&7\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{7}}{5}&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1{,}5&-1&-2\\0&2{,}0\overline{6}&10{,}\overline{3}\\0&1&5{,}94\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1{,}5&-1&-2\\0&2{,}0\overline{6}&10{,}\overline{3}\\0&0&0{,}94\end{pmatrix}\right]$$

das LGS ist nicht lösbar

$\Rightarrow$ die beiden Flugbahnen schneiden sich nicht.

Lösung 6

Discovery:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad a_1, a_2, a_3\in\mathbb{R}\ \text{ mit }\ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1{,}5\\2{,}5\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5\,p\\2{,}5\,p\\\frac{p}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Die *Discovery* hat eine Geschwindigkeit von $18\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$

$$\Rightarrow\ \left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1{,}5\,p\\2{,}5\,p\\\frac{p}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(1{,}5\,p)^2+(2{,}5\,p)^2+\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2}=18$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2{,}25\,p^2+6{,}25\,p^2+0{,}5\,p^2}=\sqrt{9\,p^2}=\pm 3\,p=18\ \Rightarrow p=6$$

$$\Rightarrow\ a_1=9\wedge a_2=15\wedge a_3=3\sqrt{2}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}9\\15\\3\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Endeavour:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\9\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad b_1, b_2, b_3\in\mathbb{R}\ \text{ mit }\ \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}1\\-0{,}4\\-\frac{\sqrt{7}}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\-0{,}4\,p\\-\frac{\sqrt{7}}{5}\,p\end{pmatrix}$$

Die *Endeavour* hat eine Geschwindigkeit von $12\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$

$$\Rightarrow\ \left|\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}p\\-0{,}4\,p\\-\frac{\sqrt{7}}{5}\,p\end{pmatrix}\right|=\sqrt{p^2+(-0{,}4\,p)^2+\left(-\frac{\sqrt{7}}{5}\,p\right)^2}=12$$

$$\Rightarrow\sqrt{p^2+0{,}16\,p^2+\frac{7}{25}\,p^2}=\sqrt{1{,}44\,p^2}=\pm 1{,}2\,p=12\ \Rightarrow p=10$$

$$\Rightarrow\ b_1=10\wedge b_2=-4\wedge b_3=-2\sqrt{7}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\9\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10\\-4\\-2\sqrt{7}\end{pmatrix}$$

minimaler Abstand:

Der Abstand der beiden Raumschiffe entspricht der Länge des Vektors von der *Discovery* zur *Endeavour*:

$$d(t)=\left|\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}9\\15\\3\sqrt{2}\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}3\\9\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10\\-4\\-2\sqrt{7}\end{pmatrix}\right]\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\-7\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\19\\3\sqrt{2}+2\sqrt{7}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix}2-t\\19t-7\\(3\sqrt{2}+2\sqrt{7})t-5\end{pmatrix}\right|\approx\left|\begin{pmatrix}2-t\\19t-7\\9{,}53t-5\end{pmatrix}\right|$$

$$=\sqrt{(2-t)^2+(19t-7)^2+(9{,}53t-5)^2}=\sqrt{452{,}9t^2-365{,}34t+78}$$

$d(t)$ nimmt genau dann den kleinsten Wert an, wenn die Diskriminante den kleinsten Wert annimmt:

$$\bar{d}(t)=452{,}9t^2-365{,}34t+78$$

Bestimme das absolute Minimum von $\bar{d}(t)$:

$\bar{d}'(t)=905{,}8t-365{,}34 \;\wedge\; \bar{d}''(t)=905{,}8$

nach $\bar{d}'(t)=0 \;\Rightarrow\; t\approx 0{,}4$ Sekunden

wird das absolute Minimum erreicht,

da $\bar{d}(t)$ eine nach oben geöffnete Parabel ist.

Der kleinste Abstand ist

$d(0{,}4)\approx 2{,}08$ km

Lösung 7

$$3+3\sqrt{2}t=8-2\sqrt{7}t \;\Rightarrow\; \left(3\sqrt{2}+2\sqrt{7}\right)t=5$$

$$\Rightarrow\; t=\frac{5}{3\sqrt{2}+2\sqrt{7}}\approx 0{,}52 \text{ Sekunden}$$

Nach 0,52 Sekunden sind beide Raumschiffe auf der gleichen Ebene parallel zur x_1x_2 Ebene.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer
Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2018 Henrik Horstmann