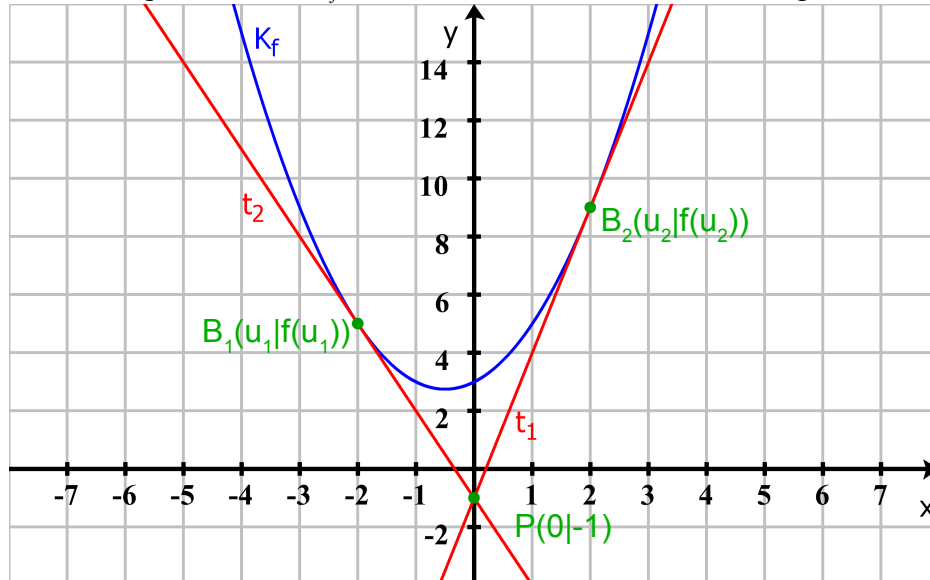


Tangenten durch einen Punkt

Um was geht es?

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = x^2 + x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. K_f ist der Graph von f .

Gesucht sind alle Tangenten an K_f , die durch den Punkt $P(0|-1)$ gehen.



Lösungsstrategie

- 1.) Die Tangente t_i ($1 \leq i \leq 2$) hat die Steigung $f'(u_i)$.
- 2.) Mit der Punkt-Steigungsform ergibt sich: $t_i: y = f'(u_i)(x - u_i) + f(u_i)$
- 3.) Durch Einsetzen der Koordinaten von P (Hinweis: t_i ist so gewählt, dass P auf t_i liegt) in die Gleichung der Tangente ergibt sich die Gleichung $-1 = f'(u_i)(0 - u_i) + f(u_i)$. Diese Gleichung nach u auflösen. Es ergibt sich $u_1 = -2$ und $u_2 = 2$.
- 4.) Mithilfe der in Schritt 3 berechneten Stellen werden die Tangentengleichungen aufgestellt.
 $t_1: y = -3x - 1$ und $t_2: y = 5x - 1$

Durch welche Punkte verlaufen Tangenten

Gibt es Punkte, die auf einer bestimmten Anzahl von Tangenten an K_f liegen, bzw. die auf keiner Tangente liegen?

Dazu muss die Untersuchung für den allgemeinen Fall $P(x_p|y_p)$ durchgeführt werden:

In Schritt 3 werden die Koordinaten x_p und y_p eingesetzt:

$$y_p = f'(u)(x_p - u) + f(u) \Rightarrow u = x_p + \sqrt{x_p^2 + x_p - y_p + 3} \quad \vee \quad u = x_p - \sqrt{x_p^2 + x_p - y_p + 3}$$

CAS

$$0 > x_p^2 + x_p - y_p + 3 \Rightarrow y_p < x_p^2 + x_p + 3 \Rightarrow P \text{ liegt auf keiner Tangente}$$

$$0 = x_p^2 + x_p - y_p + 3 \Rightarrow y_p = x_p^2 + x_p + 3 \Rightarrow P \text{ liegt auf genau einer Tangente}$$

$$0 < x_p^2 + x_p - y_p + 3 \Rightarrow y_p > x_p^2 + x_p + 3 \Rightarrow P \text{ liegt auf zwei Tangenten}$$