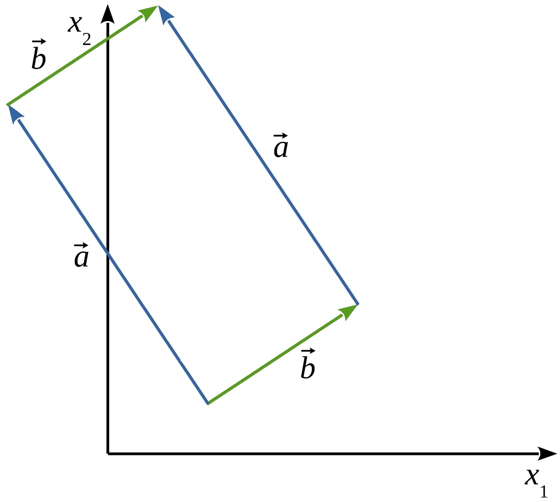
Skalarprodukt

Ausgangssituation

Nebenstehendes Schaubild zeigt

die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$:



Forschungsauftrag

a) Welche Form wird von den Vektoren eingeschlossen? **Lösung 1**

b) Welche Aussagen können Sie zu den Seiten, Diagonalen und Winkeln der Form machen? **Lösung 2**

c) Bestimmen Sie die Vektoren, die den Diagonalen entsprechen. **Lösung 3**

Schlussfolgerungen

Wenn zwei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vom selben Punkt ausgehen, wie groß ist dann der Winkel, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen, wenn $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$? **Lösung 4**

Bringen Sie die einzelnen Umformungsschritte in eine logische Reihenfolge: **Lösung 5**

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

$\Rightarrow \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

$\Rightarrow (a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$

$\Rightarrow a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+a_2^2+2a_2b_2+b_2^2=a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2$

$\Rightarrow 4a_1b_1+4a_2b_2=0$

$\Rightarrow 4(a_1b_1+a_2b_2)=0$

$\Rightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$

$\boxed{a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+a_2^2+2a_2b_2+b_2^2=a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2}$

$\boxed{\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}}$

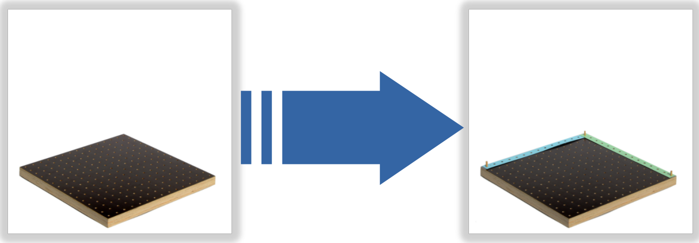
$\boxed{4(a_1b_1+a_2b_2)=0}$

$\boxed{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

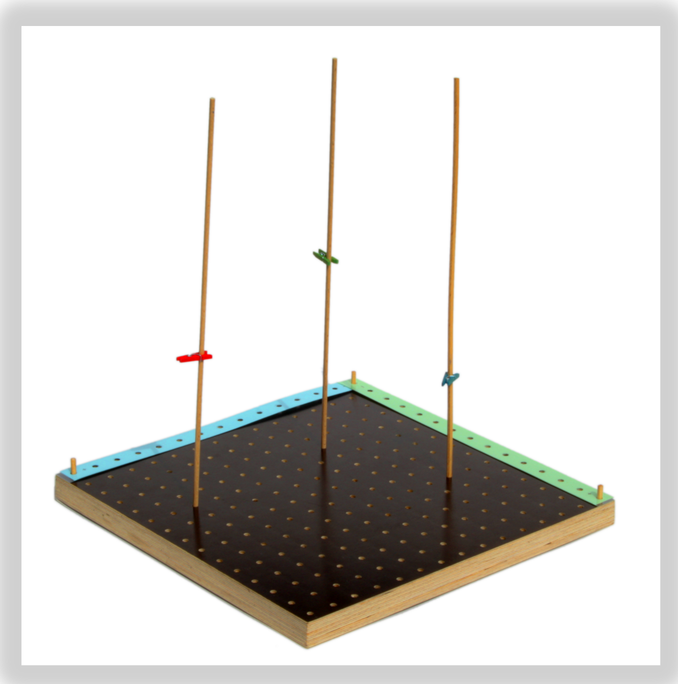
$\boxed{4a_1b_1+4a_2b_2=0}$

Aufbau des 3D-Modells

Auf der Grundplatte ein Koordinatensystem festlegen (blau $\widehat{=} x_1$, grün $\widehat{=} x_2$):



Platzieren Sie die Punkte $P(4|3|12)$, $Q(12|5|3{,}5)$ und $S(3|9|6)$:



Forschungsauftrag

a) Prüfen Sie durch Messen mit dem Geodreieck, ob die Vektoren $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}$ und $\vec{s}=\overrightarrow{PS}$ orthogonal[1] zueinander sind $(\vec{a}\perp\vec{b})$.

Tipp 1

b) Übertragen Sie die Schlussfolgerung aus dem 2 dimensionalen Raum (siehe oben) auf den 3 dimensionalen Raum und zeigen Sie rechnerisch, dass die Bedingung ebenfalls gilt.

Lösung 6

1 Orthogonal heißt senkrecht zueinander.

Definition

Das Produkt zweier Vektoren

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\dots+a_n\cdot b_n$$

heißt **Skalarprodukt**.

Satz

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal zueinander $(\vec{a}\perp\vec{b})$, wenn

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=$$

Ergänzen Sie vorstehende Gleichung.

Lösung 7