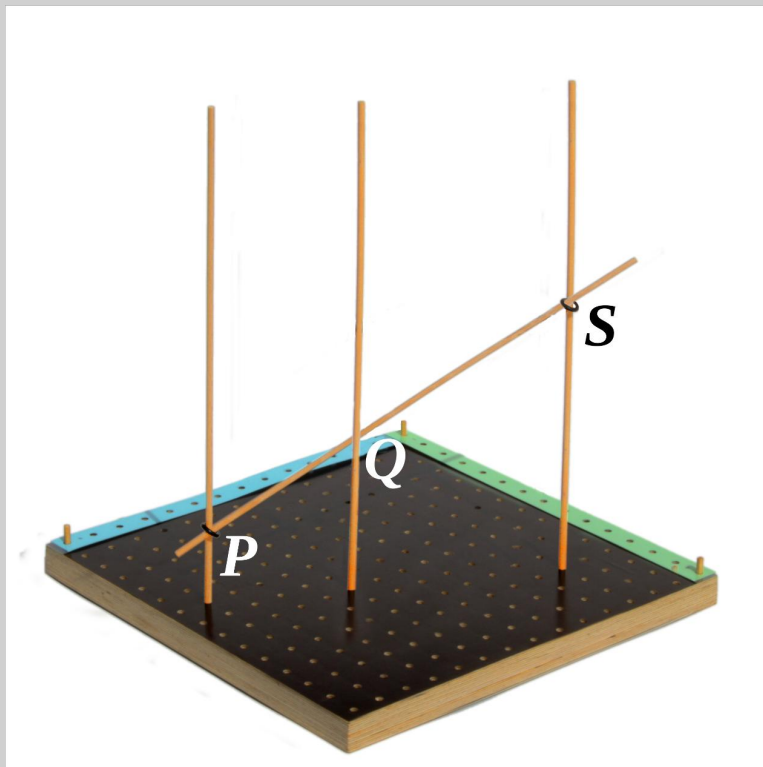




Vorbereitung

Im 3D-Modell werden drei Punkte P, Q und S so platziert, dass sie auf einer Geraden liegen.

Beispiel:



Hinweis: An dieser Stelle kann es sinnvoll sein, eine Hilfestellung zu geben, wie die drei Punkte gewählt werden müssen.

Entdecken der skalaren Multiplikation

Die Aufgabe besteht nun darin, einen Zusammenhang zwischen den Vektoren $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{r} = \overrightarrow{PS}$ zu überprüfen. Überprüfen Sie die Erkenntnisse an einem weiteren Beispiel im 3D-Modell.





Festigen

Im 3D-Modell wird eine weitere Situation aufgebaut, die den Anforderungen entsprechend dem Abschnitt Vorbereitung genügt.

Aufgaben:

- ◆ Aus dem 3D-Modell werden die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{r}$ ermittelt und im Anschluss der Faktor s mit $\vec{r} = s \cdot \vec{v}$ berechnet. Durch eine Probe kann das Resultat überprüft werden (eigenständige Lösungskontrolle).
- ◆ es liegt ein Faktor vor, und es soll $\vec{r}$ aus $\vec{v}$ ermittelt werden. Die Ergebnisse können am 3D-Modell überprüft werden (eigenständige Lösungskontrolle).

Anwenden

Zusammen mit der Vektoraddition können folgende Probleme gelöst werden:

- ◆ Mittelpunkt einer Strecke ermitteln.
- ◆ Weitere Punkte auf einer Strecke ermittelt werden. Dies kann auch als Vorbereitung auf des Thema Geraden betrachtet werden.





Warum gibt es keine Division?

Warum gibt es keine Division von Vektoren? Zunächst einmal stellt sich die Frage, zu welcher der 3 Multiplikationen (skalare Multiplikation, Skalarprodukt, Kreuzprodukt) eine Division definiert werden soll. Außerdem soll für die Division die Äquivalenz $a \div b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a$ gelten.

Im folgenden werden einige Begründungen aufgelistet, nach denen es keine entsprechende Division geben kann:

Skalare Multiplikation:

Zunächst könnte man in Versuchung kommen, ähnlich der Addition und Subtraktion auch die Division komponentenweise durchzuführen.

$$\vec{a} \div \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \div \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{a_2}{b_2} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{b_n} \end{pmatrix}$$

Bei dieser Definition ist allerdings für viele Vektoren die Division nicht definiert, denn sobald ein Element des Divisors 0 ist, kann nicht mehr geteilt werden.

Ein weiteres Problem in der Definition besteht darin, dass die Division wieder einen Vektor ergibt. Soll jedoch die skalare Multiplikation umgekehrt werden, so müsste ein Skalar heraus kommen: $\vec{a} = r \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \div \vec{b} = r, r \in \mathbb{R}$.

Skalarprodukt

Die folgende Begründung ist allgemein formuliert, da sie sich nicht auf eine spezielle Definition beschränkt, sondern im allgemeinen eine Begründung liefert, warum eine Division für das Skalarprodukt $s = \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ nicht sinnvoll ist.

Ein Division für das Skalarprodukt müsste die Eigenschaft haben, dass $s \div \vec{a} = \vec{b}$ ist.

Es ist jedoch so, dass für festes $\vec{a}$ und s unendlich viele $\vec{b}$ existieren, so dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren s ergibt. Es gibt somit kein eindeutiges Ergebnis bei der Division, weshalb sie nicht wohldefiniert ist.

Kreuzprodukt

Beim Kreuzprodukt verhält es sich ganz ähnlich, wie beim Skalarprodukt. Auch hier gibt es zu zwei Vektoren $\vec{k}$ und $\vec{a}$ unendliche viele Vektoren $\vec{b}$ für die $\vec{k} = \vec{a} \times \vec{b}$ gilt. Das Ergebnis von $\vec{k} \div \vec{a} = \vec{b}$ ist somit nicht eindeutig, weshalb die Division nicht wohldefiniert wäre.

