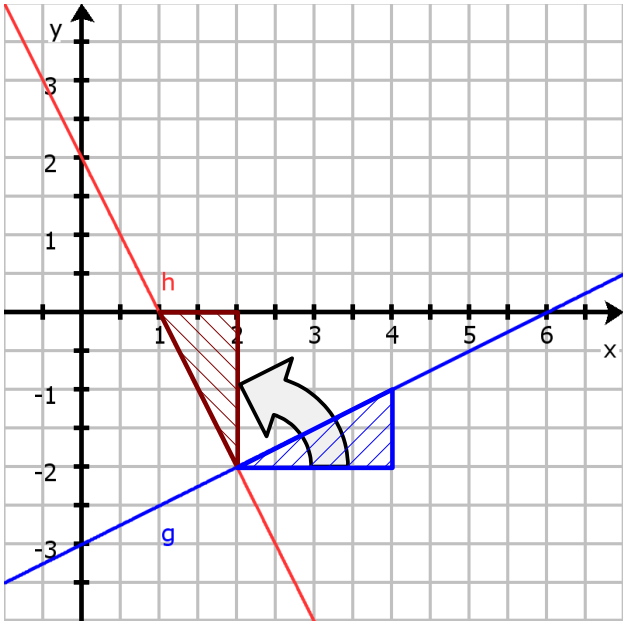
Normale an einer gegebenen Stelle

Die Orthogonale

Gegeben ist die Gerade g mit der Funktionsgleichung $g(x)=\frac{1}{2}x-3$. Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Geraden h die an der Stelle $x_0=2$ die Gerade g im rechten Winkel schneidet.



<u>Lösung:</u>

Die Steigung von h ist $m_h=-\frac{1}{m_g}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$.

Damit ist $h(x)=-2x+b$.

Da h durch den Punkt $(-2 \mid g(-2))$ geht, kann durch Einsetzen der y-Achsenabshnitt berechnet werden:

$-2=-2\cdot 2+b \Rightarrow b=2$

Damit ist $h(x)=-2x+2$

Hinweis: Die Gerade h ist eine <u>Orthogonale</u> zu g.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2008 Henrik Horstmann

Normale

Definition:

Sei K_f die Kurve der Funktion f und t eine Tangente an die Kurve K_f an der Stelle x_0. Ist h eine Gerade, die t an der Stelle x_0 im rechten Winkel schneidet, so wird h als <u>Normale</u> bezeichnet.

Beispiel:

Sei K_f die Kurve der Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{3}x^3+2x^2-3x$. Gesucht ist dieNormale der Kurve K_f an der Stelle $x_0 = -2$.

<u>Lösung:</u>

Steigung der Normale:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3+2x^2-3x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x^2+4x-3$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{3}$$

y−Achsenabschnitt der Normale:

Die Normale schneidet die Kurve an der Stelle x_0

$$\Rightarrow h(-2) = f(-2) = \frac{26}{3}$$

$$\Rightarrow h(-2) = \frac{26}{3} = \frac{1}{3}\cdot(-2)+b$$

$$\Rightarrow b = \frac{26}{3} - \left(\frac{1}{3}\cdot(-2)\right) = \frac{28}{3}$$

Funktionsgleichung der Normale:

$$h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{28}{3}$$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2008 Henrik Horstmann

Aufgaben

Sei K_f die Kurve der Funktion f. Gesucht ist die Normale der Kurve K_f an der Stelle x_0:

a) $f(x) = -\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \quad ; \quad x_0 = 1$

<u>Lösung:</u>

Steigung der Normale:

$$f(x) = -\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -5x^2 - x - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{f'(1)} = \frac{2}{15}$$

y−Achsenabschnitt der Normale:

Die Normale schneidet die Kurve an der Stelle x_0

$$\Rightarrow h(1) = f(1) = -\frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow h(1) = -\frac{11}{3} = \frac{2}{15} \cdot 1 + b$$

$$\Rightarrow b = -\frac{11}{3} - \left(\frac{2}{15} \cdot 1\right) = -\frac{19}{5}$$

Funktionsgleichung der Normale:

$$h(x) = \frac{2}{15}x - \frac{19}{5}$$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \quad ; \quad x_0 = -1$

<u>Lösung:</u>

Steigung der Normale:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{f'(-1)} = -1$$

y−Achsenabschnitt der Normale:

Die Normale schneidet die Kurve an der Stelle x_0

$$\Rightarrow h(-1) = f(-1) = 0$$

$$\Rightarrow h(-1) = 0 = -1 \cdot (-1) + b$$

$$\Rightarrow b = 0 - (-1 \cdot (-1)) = -1$$

Funktionsgleichung der Normale:

$$h(x) = -x - 1$$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2008 Henrik Horstmann

Sei K_f die Kurve der Funktion f. Gesucht ist die Tangente und die Normale der Kurve K_f an der Stelle x_0:

c) $f(x) = -2x^2 - x \;;\quad x_0 = -1$

<u>Lösung:</u>

Steigung der Tangente:

$$f(x) = -2x^2 - x$$
$$\Rightarrow f'(x) = -4x - 1$$
$$\Rightarrow m = f'(-1) = 3$$

y−Achsenabschnitt der Tangente:

Die Tangente berührt die Kurve an der Stelle x_0

$$\Rightarrow t(-1) = f(-1) = -1$$
$$\Rightarrow t(-1) = -1 = 3 \cdot (-1) + b$$
$$\Rightarrow b = -1 - (3 \cdot (-1)) = 2$$

Funktionsgleichung der Tangente:

$$t(x) = 3x + 2$$

Steigung der Normale:

$$f(x) = -2x^2 - x$$
$$\Rightarrow f'(x) = -4x - 1$$
$$\Rightarrow m = -\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{3}$$

y−Achsenabschnitt der Normale:

Die Normale schneidet die Kurve an der Stelle x_0

$$\Rightarrow h(-1) = f(-1) = -1$$
$$\Rightarrow h(-1) = -1 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + b$$
$$\Rightarrow b = -1 - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-1)\right) = -\frac{4}{3}$$

Funktionsgleichung der Normale:

$$h(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2008 Henrik Horstmann

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x \;;\quad x_0 = -\frac{1}{2}$

<u>Lösung:</u>

Steigung der Tangente:

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$\Rightarrow m = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$

y−Achsenabschnitt der Tangente:

Die Tangente berührt die Kurve an der Stelle x_0

$\Rightarrow t\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow t\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} = \frac{7}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b$

$\Rightarrow b = -\frac{1}{8} - \left(\frac{7}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{4}$

Funktionsgleichung der Tangente:

$t(x) = \frac{7}{4}x + \frac{3}{4}$

Steigung der Normale:

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$\Rightarrow m = -\frac{1}{f'\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{4}{7}$

y−Achsenabschnitt der Normale:

Die Normale schneidet die Kurve an der Stelle x_0

$\Rightarrow h\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow h\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} = -\frac{4}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b$

$\Rightarrow b = -\frac{1}{8} - \left(-\frac{4}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{23}{56}$

Funktionsgleichung der Normale:

$h(x) = -\frac{4}{7}x - \frac{23}{56}$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2008 Henrik Horstmann