Lösungsvorschläge

Symmetrien

a) K_f ist symmetrisch zur y-Achse, da der Funktionsterm ein Polynom mit ausschließlich geraden Exponenten ist.

b) K_f Ist nicht symmetrisch, da der Funktionsterm ein Polynom mit geraden und ungeraden Exponenten ist.

c) K_f Ist weder zur y-Achse, noch zum Ursprung symmetrisch, denn:
$$f(-x)=\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x}\neq\mathrm{e}^x=f(x)\ \wedge\ -f(-x)=-\mathrm{e}^{-x}=-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\neq\mathrm{e}^x=f(x)$$

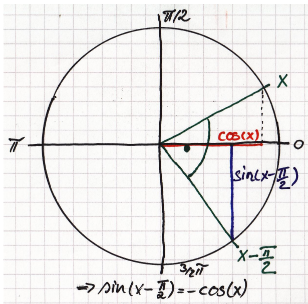
d) $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)\ \Rightarrow\ K_f$ ist symmetrisch zur y-Achse.

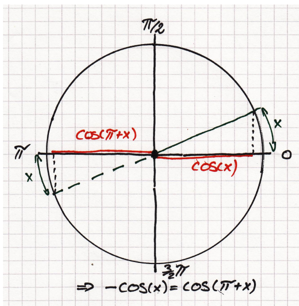
e) $f(-x)=\frac{-x}{|-x|}\sqrt{4-(-x)^2}=-\frac{x}{|x|}\sqrt{4-x^2}=-f(x)\ \Rightarrow\ K_f$ ist symmetrisch zum Ursprung.

f) $f(-x)=\left(4-(-x)^3\right)^4=\left(4+x^3\right)^4\neq\begin{cases}\left(4-x^3\right)^4=f(x)\\-\left(4-x^3\right)^4=-f(x)\end{cases}\ \Rightarrow\ K_f$ Ist weder zur y-Achse, noch zum Ursprung symmetrisch.

g) $f(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-2x}+1}{\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-x}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}+\mathrm{e}^x=\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^x=\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}=f(x)\ \Rightarrow\ K_f$ ist symmetrisch zur y-Achse.

h) K_f ist symmetrisch zur y-Achse, denn:
Zunächst einmal gilt:
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(x)\quad [1]$





$$f(-x)=\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)\underset{[1]}{=}-\cos(-x)=\cos(\pi+x)=\cos(\pi-x)=-\cos(x)\underset{[1]}{=}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$$

i) Der Graph von $p(x)=f(x)\cdot h(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse.

j) Der Graph von $p(x)=f(x)+h(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse.

k) Der Graph von $p(x)=f(x)\cdot h(x)$ ist symmetrisch zum Ursprung.

l) Der Graph von $p(x)=f(h(x))$ ist symmetrisch zur y-Achse.

Verschieben

a) $h(x)=f(x+2)+3=(x+2)^2-(x+2)+3=x^2+4x+4-x-2+3=x^2+3x+5$

b) $h(x)=f(x-4)-5=(x-4+4)^5\cdot\sin(x-4)-5=x^5\cdot\sin(x-4)-5$

c) Z.B. um $\frac{\pi}{2}$ LE nach links.

d) Um 4 LE nach links.

e) Um 3 LE nach rechts.

Strecken

a) $f(x)=h\left(\frac{1}{3}x\right)=\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$

b) $f(x)=h(a\cdot x)=\frac{(a\cdot x)^2}{2}+a\cdot x-4=\frac{a^2}{2}x^2+a\cdot x-4$, P soll auf K_f liegen

$\Rightarrow\ -\frac{5}{2}=f(4)=8a^2+4a-4\ \Rightarrow\ 8a^2+4a-\frac{3}{2}=0\ \Rightarrow\ 16a^2+8a-3=0$

Setze $a=16,\ b=8,\ c=-3$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-8\pm\sqrt{(8)^2-4\cdot16\cdot(-3)}}{2\cdot16}\\
&= \frac{-8\pm\sqrt{64+192}}{32}\\
&= \frac{-8\pm\sqrt{256}}{32}\\
&= \frac{-8\pm16}{32}\\
x_1 &= -\frac{3}{4}\\
x_2 &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Setze $a=\frac{1}{4}$ in den Funktionsterm ein:

$$f(x)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2}x^2+\frac{1}{4}x-4=\frac{1}{32}x^2+\frac{1}{4}x-4$$

c) $f(x)=a(x-2)^2$

$2=f(3)=a$, für $a=2$ liegt P auf K_f, das bedeutet, dass für $a>2$ der Punkt P unterhalb von K_f liegt. Wähle $a=3$: $f(x)=3(x-2)^2$.

