Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1 (BK)

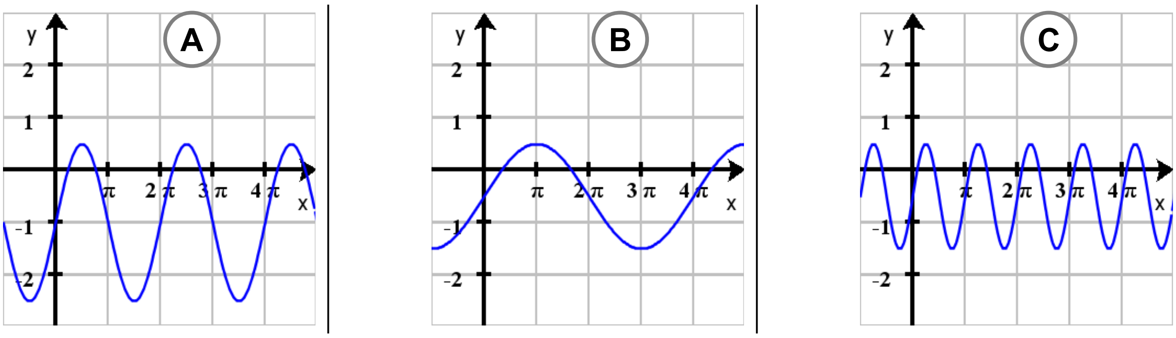
Bestimmen Sie in den folgenden Gleichungen den exakten Wert für x.

1. $\sin\left(\frac{2}{9}\pi\right) = \sin(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \ x \neq \frac{2}{9}$
2. $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \cos(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

Aufgabe 2 (BK)

Sei K_f das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + b$.

1. Welche der zwei folgenden Schaubilder gehören nicht zu K_f. Begründen Sie Ihre Aussage.



2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung zu dem Graphen aus Schaubild A.

Aufgabe 3 (BK)

Sei f eine Funktion mit $f(x) = 0{,}5\cos(x) + 1$.

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = 1{,}5$ zwei Lösungen für $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ besitzt.
2. Sei K_f der Graph von f. Begründen Sie, warum K_f keine Nullstellen besitzt.

Aufgabe 4 (BOS)

Für jedes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion f_t durch

$$f_t(x) = \frac{t}{4}\left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1\right)$$

gegeben. Das Schaubild von f_t ist gegeben durch K_t. Der Definitionsbereich von f_t ist $D = [-\pi; 5\pi]$.

Bestimmen Sie die Perioden von K_t.

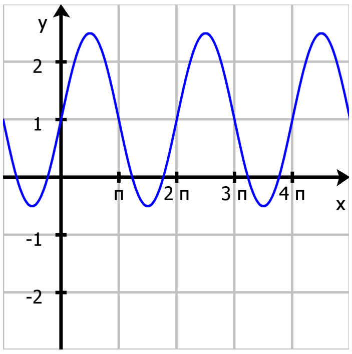
Bestimmen Sie die exakten Schnittpunkte von K_2 mit den Koordinatenachsen (berücksichtigen Sie dabei den Definitionsbereich).

Aufgabe 5 (BK)

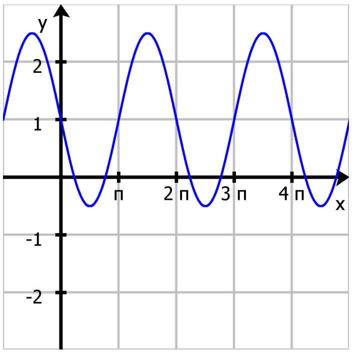
Sei K das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos\left(\frac{3}{2}x\right) - 1$. Bestimmen Sie die exakten Nullstellen von K für $-\pi \leq x \leq 4\pi$.

Aufgabe 6 (BK)

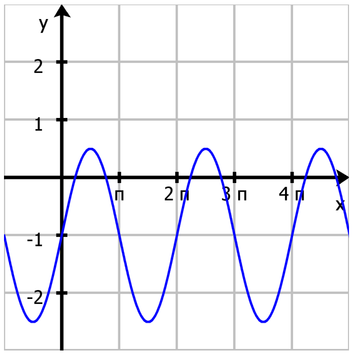
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(x)+1$.



A



B

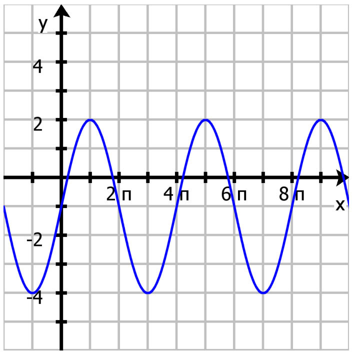


C

1. Es ist bekannt, dass zwei der dargestellten Kurven A, B und C nicht Schaubild von f sein können. Welche sind dies? Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie zu jedem nicht zutreffenden Schaubild eine Eigenschaft nennen, nicht mit den Funktionseigenschaften von f vereinbar ist.
2. Ändern Sie die Funktionsgleichung von f ab, so dass sich die Periode von f halbiert.

Aufgabe 7 (BK)

Das nebenstehende Schaubild hat die Funktionsgleichung: $f(x) = a\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+b$.



1. Bestimmen Sie a und b .
2. Geben Sie die exakte Periodenlänge an.

Lösungen

zu Aufgabe 1: $x = \frac{7}{9}$, $x = \frac{1}{3}$

zu Aufgabe 2: A, C, $f(x) = \frac{3}{2}\sin(x)-1$

zu Aufgabe 4: $p=4\pi$, $N_1(\pi \mid 0)$ und $N_2(5\pi \mid 0)$

zu Aufgabe 5: $N_1(0 \mid 0)$, $N_2\left(\frac{4}{3}\pi \mid 0\right)$, $N_3\left(\frac{8}{3}\pi \mid 0\right)$, $N_4(4\pi \mid 0)$

zu Aufgabe 6: A, C, $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(2x)+1$

zu Aufgabe 7: $a=3$ $b=-1$ $p=4\pi$

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

1. $x = \frac{7}{9}$
2. $x = \frac{1}{3}$

Lösung zu Aufgabe 2

1. Schaubild A gehört nicht zu K_f, da die Amplitude des Graphen in Schaubild A $a = \frac{3}{2}$ ist.
   Schaubild C gehört ebenfalls nicht zu K_f, da die Periode des in C dargestellten Graphen die Länge π hat. K_f Hat jedoch eine Periode von 4π.
2. $f(x) = \frac{3}{2}\sin(x) - 1$

Lösung zu Aufgabe 3

1. $$\begin{aligned} 0{,}5\cos(x)+1 &= 1{,}5 &&\mid -1 \\ 0{,}5\cos(x) &= 0{,}5 &&\mid \div 0{,}5 \\ \cos(x) &= 1 \end{aligned}$$
   $\Rightarrow\ x_1 = 0,\ x_2 = 2\pi$
2. Setze $f(x) = 0$:
   $$\begin{aligned} 0{,}5\cos(x)+1 &= 0 &&\mid -1 \\ 0{,}5\cos(x) &= -1 &&\mid \div 0{,}5 \\ \cos(x) &= -2 \end{aligned}$$
   Es ist aber $-1 \leqslant \cos(x)$ für alle x.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Periode $p=4\pi$ (sie ist unabhängig von t).
Schnittpunkt mit der y-Achse:
$$f_2(0)=\frac{1}{2}(\sin(0)-1)=\frac{1}{2}(-1)=-\frac{1}{2}$$
Schnittpunkte mit der x-Achse:
$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-1\right) &= 0 &&\mid \cdot 2 \\ \sin\left(\frac{1}{2}x\right)-1 &= 0 &&\mid +1 \\ \sin\left(\frac{1}{2}x\right) &= 1 \\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2}\pi &&\mid \cdot 2 \\ x &= \pi \end{aligned}$$
Mit der Periode und dem Definitionsbereich ergibt sich:
$N_1(\pi \mid 0)$ und $N_2(5\pi \mid 0)$ sind einzige Nullstelle von K_2.

Lösung zu Aufgabe 5

Setze $f(x) = 0$:

$$\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - 1 = 0 \quad | +1$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}x\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x = 2n\pi$$

für ein beliebiges $n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}n\pi$$

$$\Rightarrow \quad x \in \left\{0,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ 4\pi\right\}$$

Nullstellen: $N_1(0 \mid 0)$, $N_2\left(\frac{4}{3}\pi \mid 0\right)$, $N_3\left(\frac{8}{3}\pi \mid 0\right)$, $N_4(4\pi \mid 0)$

Lösung zu Aufgabe 6

1.
    1. A kann nicht das Schaubild von f sein, da durch das negative Vorzeichen die Kurve im Schnittpunkt mit der y-Achse eine negative Steigung haben muss.
    2. C kann nicht das Schaubild von f sein, da die Kurve in C um eine Einheit nach unten verschoben ist. Das Schaubild von f ist jedoch nach oben verschoben.
2. $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(2x) + 1$

Lösung zu Aufgabe 7

1. $a = 3$
   $b = -1$
2. Periodenlänge $p = 4\pi$

