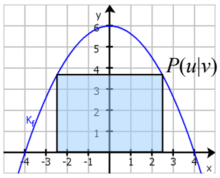
Aufgaben: Modellieren und Optimieren

Nr.	Aufgabe	Lösung
1	Zerlege die Zahl 14 in zwei Summanden, deren Produkt möglichst groß ist.	Term: $p = x \cdot y$ Nebenbedingungen: $14 = x + y$ Definitionsbereich: $x, y \in [0; 14]$ Zielfunktion: $p(x) = x \cdot y = x(14-x) = -x^2+14x$ Extrema: Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $p(x) = -x^2+14x$ $p'(x) = -2x+14$ $p''(x) = -2$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $p'(x) = 0$: $-2x + 14 = 0 \quad \vert -14$ $-2x = -14 \quad \vert \div(-2)$ $x = 7$ Untersuche die Stelle $x = 7$: $p''(7) = -2$ $p''(7) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = 7$ Überprüfung der Randwerte: $\left.\begin{array}{rcl} p(0) & = & 0 \\ p(7) & = & 49 \\ p(14) & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ globales Maximum an der Stelle $x=7$ auf D Ergebnis: 7

<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Aufgabe</th><th>Lösung</th></tr>
<tr>
<td>2</td>
<td>

$f(x)=-\frac{3}{8}x^2+6$



Bestimmen Sie *u*, so dass die Fläche des Rechtecks so groß wie möglich wird.

</td>
<td>

Term:
$A = 2u \cdot v$

Nebenbedingungen: $v = f(u) = -\frac{3}{8}u^2+6$

Definitionsbereich: $u \in [0;4]$, $v \in [0;\,6]$
Zielfunktion: $\begin{aligned} A(u) &= 2u \cdot v \\ &= 2u\left(-\frac{3}{8}u^2+6\right) \\ &= -\frac{3}{4}u^3+12u \end{aligned}$

Extrema:
Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} A(u) &= -\frac{3}{4}u^3+12u \\ A'(u) &= -\frac{9}{4}u^2+12 \\ A''(u) &= -\frac{9}{2}u \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $A'(u) = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{9}{4}u^2 + 12 &= 0 && \left|-12\right. \\ -\frac{9}{4}u^2 &= -12 && \left|\div\left(-\frac{9}{4}\right)\right. \\ u^2 &= \frac{16}{3} && \left|\sqrt{}\right. \\ u_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{16}{3}} \\ u_1 &= 4\sqrt{\frac{1}{3}} \\ u_2 &= -4\sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $u = 4\sqrt{\frac{1}{3}}$:

$A''\left(4\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $u = 4\sqrt{\frac{1}{3}}$

Untersuche die Stelle $u = -4\sqrt{\frac{1}{3}}$:

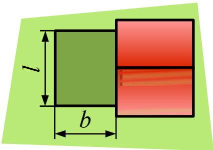
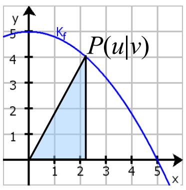
$A''\left(-4\sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $u = -4\sqrt{\frac{1}{3}}$

Überprüfung der Randwerte:

$\left.\begin{aligned} A(0) &= 0 \\ A\left(4\sqrt{\frac{1}{3}}\right) &= \frac{32}{\sqrt{3}} \\ A(4) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ globales Maximum an der Stelle $u = 4\sqrt{\frac{1}{3}}$ auf D

Ergebnis: $4\sqrt{\frac{1}{3}}$
$(\approx 2{,}3094)$

</td>
</tr>
</table>

Nr.	Aufgabe	Lösung
3	Ein Rechteck soll mit 16 m Zaun eingefasst werden. An der Hauswand ist kein Zaun nötig. Wie groß kann die Fläche maximal werden?  	Term: $A = l \cdot b$ Nebenbedingungen: $l + 2b = 16$ Definitionsbereich: $l \in [0; 16]$, $b \in [0; 8]$ Zielfunktion: $\begin{array}{rcl} A(b) & = & l \cdot b \\ & = & (16-2b) \cdot b \\ & = & 16b - 2b^2 \\ & = & -2b^2 + 16b \end{array}$ Extrema: Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $\begin{array}{rcl} A(b) & = & -2b^2+16x \\ A'(b) & = & -4b+16 \\ A''(b) & = & -4 \end{array}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $A'(b) = 0$: $\begin{array}{rcll} -4b + 16 & = & 0 & \vert -16 \\ -4b & = & -16 & \vert \div(-4) \\ b & = & 4 & \end{array}$ Untersuche die Stelle $b = 4$: $A''(4) = -4$ $A''(4) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $b = 4$ $l = 16-8 = 8$ $A = 8 \cdot 4 = 32$ Überprüfung der Randwerte: $\left.\begin{array}{rcl} A(0) & = & 0 \\ A(4) & = & 32 \\ A(8) & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ globales Maximum an der Stelle $b=4$ auf D Ergebnis: 32
4	$f(x) = -\frac{1}{5}x^2+5$  Bestimmen Sie *u*, so dass die Fläche des Dreiecks so groß wie möglich wird.	Term: $A = \frac{u \cdot v}{2}$ Nebenbedingungen: $v = f(u) = -\frac{1}{5}u^2+5$ Definitionsbereich: $u, v \in [0; 16]$ Zielfunktion: $\begin{array}{rcl} A(u) & = & \frac{u \cdot v}{2} \\ & = & \frac{u \cdot \left(-\frac{1}{5}u^2+5\right)}{2} \\ & = & \frac{-\frac{1}{5}u^3+5u}{2} \\ & = & -\frac{1}{10}u^3+\frac{5}{2}u \end{array}$

Nr.	Aufgabe	Lösung

Extrema:

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
A(u) &= -\frac{1}{10}u^3+\frac{5}{2}u\\
A'(u) &= -\frac{3}{10}u^2+\frac{5}{2}\\
A''(u) &= -\frac{3}{5}u
\end{aligned}
$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:

Setze $A'(u)=0$:

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{10}u^2+\frac{5}{2} &= 0 && \left|-\frac{5}{2}\right.\\
\frac{3}{10}u^2 &= -\frac{5}{2} && \left|\div\left(-\frac{3}{10}\right)\right.\\
u^2 &= \frac{25}{3} && \left|\sqrt{}\right.\\
u_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{25}{3}}\\
u_1 &= 5\sqrt{\frac{1}{3}}\\
u_2 &= -5\sqrt{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

Untersuche die Stelle $u=5\sqrt{\frac{1}{3}}$:

$A''\left(5\sqrt{\frac{1}{3}}\right)<0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $u=5\sqrt{\frac{1}{3}}$

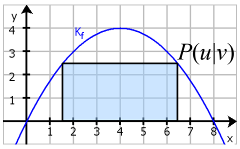
Untersuche die Stelle $u=-5\sqrt{\frac{1}{3}}$:

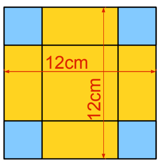
$A''\left(-5\sqrt{\frac{1}{3}}\right)<0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $u=-5\sqrt{\frac{1}{3}}$

Überprüfen der Randwerte:

$$
\left.
\begin{aligned}
A(0) &= 0\\
A\left(5\sqrt{\frac{1}{3}}\right) &= \frac{25}{3\sqrt{3}}\\
A(16) &= -\frac{1848}{5}
\end{aligned}
\right\}\Rightarrow \text{globales Maximum an der Stelle } u=5\sqrt{\frac{1}{3}} \text{ auf } D
$$

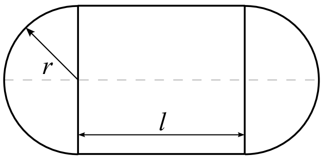
Ergebnis: $5\sqrt{\frac{1}{3}}$ $(\approx 2{,}8868)$

Nr.	Aufgabe	Lösung
5	$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$  Bestimmen Sie *u*, so dass die Fläche des Rechtecks so groß wie möglich wird.	Term: $A=\frac{2(u-4)\cdot v}{2}$ Nebenbedingungen: $v=f(u)=-\frac{1}{4}u^2+2u$ Definitionsbereich: $u\in[4;8]$, $v\in[0;4]$ Zielfunktion: $A(u) = \frac{2(u-4)\cdot v}{2}$ $= (u-4)\cdot\left(-\frac{1}{4}u^2+2u\right)$ $= -\frac{1}{4}u^3+2u^2+u^2-8u$ $= -\frac{1}{4}u^3+3u^2-8u$ Extrema: Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $A(u) = -\frac{1}{4}u^3+3u^2-8u$ $A'(u) = -\frac{3}{4}u^2+6u-8$ $A''(u) = -\frac{3}{2}u+6$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $A'(u)=0$: $-\frac{3}{4}u^2+6u-8 = 0$ Setze $a=-\frac{3}{4}$, $b=6$, $c=-8$ in die Lösungsformel ein: $u_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(-8)}}{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}$ $= \frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{-6\pm\sqrt{12}}{-\frac{3}{2}}$ $= 4\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ $u_1 = 4\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ $u_2 = 4\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

Nr.	Aufgabe	Lösung
		Untersuche die Stelle $u = 4\frac{3-\sqrt{3}}{3}$: $A''\left(4\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) > 0$ $\Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $u = 4\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ Untersuche die Stelle $u = 4\frac{3+\sqrt{3}}{3}$: $A''\left(4\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) < 0$ $\Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $u = 4\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ Überprüfung der Randwerte: $\left.\begin{array}{rcl} A(4) & = & 0 \\ A\left(4\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) & = & \frac{32}{3\sqrt{3}} \\ A(8) & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ globales Maximum an der Stelle $u=4\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ auf D Ergebnis: $4\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ $\quad (\approx 6{,}3094)$
6	Wie lang muss die Seitenlänge der blauen Quadrate sein, damit das aus dem gelben Karton gefaltete Kästchen maximales Volumen hat?  	Term: $V = h \cdot b^2$ Nebenbedingungen: $12 = 2h+b$ Definitionsbereich: $b \in [0; 12]$, $h \in [0; 6]$ Zielfunktion: $\begin{array}{rcl} V(h) & = & h \cdot b^2 \\ & = & h \cdot (12-2h)^2 \\ & = & h \cdot (144-48h+4h^2) \\ & = & 144h-48h^2+4h^3 \\ & = & 4h^3-48h^2+144h \end{array}$ Extrema: Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $\begin{array}{rcl} V(h) & = & 4h^3-48h^2+144h \\ V'(h) & = & 12h^2-96h+144 \\ V''(h) & = & 24h-96 \end{array}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $V'(u)=0$: $12h^2 - 96h + 144 = 0$ Setze $a=12,\ b=-96,\ c=144$ in die Lösungsformel ein: $\begin{array}{rcl} h_{1,2} & = & \frac{96 \pm \sqrt{(-96)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 144}}{2 \cdot 12} \\ & = & \frac{96 \pm \sqrt{9216-6912}}{24} \\ & = & \frac{96 \pm \sqrt{2304}}{24} \\ & = & \frac{96 \pm 48}{24} \\ h_1 & = & 2 \\ h_2 & = & 6 \end{array}$ Untersuche die Stelle $h = 2$: $V''(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $h = 2$ Untersuche die Stelle $u = 6$: $V''(6) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $h = 6$

Nr.	Aufgabe	Lösung
		Überprüfung der Randwerte: $\left.\begin{array}{lcl} V(0) & = & 0 \\ V(2) & = & 128 \\ V(6) & = & 0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ globales Maximum an der Stelle $h=2$ auf D Ergebnis: 2
7	Die Kosten eines Betriebs werden durch $K(x)=\frac{1}{50}x^3-\frac{6}{5}x^2+50x+1000$ beschrieben. $E(x)=-2x^2+160x$ ist die Erlösfunktion. Bei welcher Stückzahl wird das Gewinnmaximum erzielt?	$G(x)=E(x)-K(x)$ $=-2x^2+160x-\left(\frac{1}{50}x^3-\frac{6}{5}x^2+50x+1000\right)$ $=-\frac{1}{50}x^3-\frac{4}{5}x^2+110x-1000$ Definitionsbereich: $0\leq x$ Berechnung des maximalen Gewinns: Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $G(x) = -\frac{1}{50}x^3-\frac{4}{5}x^2+110x-1000$ $G'(x) = -\frac{3}{50}x^2-\frac{8}{5}x+110$ $G''(x) = -\frac{6}{50}x-\frac{8}{5}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $G'(x)=0$: mit dem GTR $x_1 = -58{,}1787$ $x_2 = 31{,}5121$ Untersuche die Stelle $x=-58{,}1787$: $G''(-58{,}1787) = 5{,}3814$ $G''(-58{,}1787)>0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x=-58{,}1787$ $G(-58{,}1787)=-753{,}4280 \Rightarrow T(-58{,}1787 \mid -753{,}4280)$ Untersuche die Stelle $x=31{,}7731$: $G''(31{,}5121) = -5{,}3815$ $G''(31{,}5121)<0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x=31{,}5121$ $G(31{,}5121)=1046{,}0829 \Rightarrow H(31{,}5121 \mid 1046{,}0829)$ Überprüfung der Randwerte: $G(0)=-1000$. Da G eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist, muss Sie nach dem Hochpunkt monton fallend sein. Damit hat G an der Stelle $x=31{,}7731$ ein globales Maximum auf D. Der maximale Gewinn wird bei einer Stückzahl von $x=31{,}5121$ ME erzielt. Ergebnis $\approx 31{,}5121$

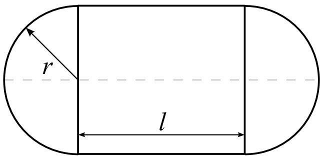
Nr.	Aufgabe	Lösung
8	Sei K_f das Schaubild von $f=\frac{1}{4}x^2-x+4$ und K_h das Schaubild von $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$ An welcher Stelle ist der Abstand von K_f und K_h am geringsten?	Zielfunktion: $D(x) = f(x)-h(x)$ $= \frac{1}{4}x^2-x+4-\left(-\frac{1}{2}x^2+4x-6\right)$ $= \frac{3}{4}x^2-5x+10$ Extrema: Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $D(x) = \frac{3}{4}x^2-5x+10$ $D'(x) = \frac{3}{2}x-5$ $D''(x) = \frac{3}{2}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $D'(x)=0$: $\frac{3}{2}x-5 = 0 \quad \vert +5$ $\frac{3}{2}x = 5 \quad \vert \div\frac{3}{2}$ $x = \frac{10}{3}$ Untersuche die Stelle $x=\frac{10}{3}$: $D''\left(\frac{10}{3}\right) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x=\frac{10}{3}$ Überprüfung der Randwerte: Da es sich bei der Funktion $D(x)$ um ein nach oben geöffnete Parabel handelt, ist der Tiefpunkt ein globales Minimum. Ergebnis: $\frac{10}{3}$ $(\approx 3{,}3333)$

Nr.	Aufgabe	Lösung
9	 Das Rechteck hat eine Fläche von $A = 50\,\text{m}^2$. Wie lang muss l sein, damit der Umfang der Form so gering wie möglich ist?	Term: $U = 2(l + \pi r)$ Nebenbedingungen: $50 = l \cdot 2r$ Definitionsbereich: $0 < l$, $0 < r$ Zielfunktion: $U(l) = 2(l + \pi r) = 2\left(l + \pi \frac{25}{l}\right) = 2l + \frac{50\pi}{l}$ Extrema: Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $U(l) = 2l + \frac{50\pi}{l}$ $U'(l) = 2 - \frac{50\pi}{l^2}$ $U''(l) = \frac{100\pi}{l^3}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $U'(l) = 0$: $2 - \frac{50\pi}{l^2} = 0 \quad \| \cdot l^2$ $2l^2 - 50\pi = 0 \quad \| +50\pi$ $2l^2 = 50\pi \quad \| \div 2$ $l^2 = 25\pi \quad \| \sqrt{\ }$ $l_{1,2} = \pm\sqrt{25\pi}$ $l_{1,2} = \pm 5\sqrt{\pi}$ $l_1 = 5\sqrt{\pi}$ $l_2 = -5\sqrt{\pi}$ Untersuche die Stelle $l = 5\sqrt{\pi}$: $U''(5\sqrt{\pi}) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $l = 5\sqrt{\pi}$ Untersuche die Stelle $l = -5\sqrt{\pi}$: $U''(-5\sqrt{\pi}) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $l = -5\sqrt{\pi}$ Untersuchung der Randwerte: Für $l \to 0$, $0 < l$ geht $U'(l) \to \infty$ und für $l \to \infty$ geht $U'(l) \to \infty$. Damit hat U an der Stelle $l = 5\sqrt{\pi}$ ein globales Minimum auf D. Ergebnis: $5\sqrt{\pi}$ $(\approx 8{,}8623)$

Nr.	Aufgabe	Lösung
10	Die Oberfläche einer Dose ist $O = 1200\,\text{cm}^2$. Welchen Durchmesser muss die Dose haben, damit das Volumen maximal ist? 	Term: $V = \frac{\pi d^2}{4} h$ Nebenbedingungen: $1200 = \pi d \left(h + \frac{d}{2}\right)$ Definitionsbereich: $0 < d$, $0 < h$ Zielfunktion: $\begin{aligned} V(d) &= \frac{\pi d^2}{4} h \\ &= \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{1200}{\pi d} - \frac{d}{2}\right) \\ &= 300d - \frac{\pi}{8} d^3 \\ &= -\frac{\pi}{8} d^3 + 300d \end{aligned}$ Extrema: Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $\begin{aligned} V(d) &= -\frac{\pi}{8} d^3 + 300d \\ V'(d) &= -\frac{3\pi}{8} d^2 + 300 \\ V''(d) &= -\frac{3\pi}{4} d \end{aligned}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $U'(l) = 0$: $\begin{aligned} -\frac{3\pi}{8} d^2 + 300 &= 0 && \mid -300 \\ -\frac{3\pi}{8} d^2 &= -300 && \mid \div\left(-\frac{3\pi}{8}\right) \\ d^2 &= \frac{800}{\pi} && \mid \sqrt{} \\ d_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{800}{\pi}} \\ d_{1,2} &= \pm 20\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ d_1 &= 20\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ d_2 &= -20\sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$ Untersuche die Stelle $d = 20\sqrt{\frac{2}{\pi}}$: $V''\left(20\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $d = 20\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ Untersuche die Stelle $d = -20\sqrt{\frac{2}{\pi}}$: $V''\left(-20\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $d = -20\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Nr.	Aufgabe	Lösung
		Überprüfung der Randwerte: $V(0)=0<\frac{4000\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=V\left(20\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$ und für $d\to\infty$ geht $V(d)\to\infty$. Damit hat V an der Stelle $d=20\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ein globales Maximum auf D. Ergebnis: $20\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $(\approx 15{,}9577)$
11	Gesucht ist $n\in\mathbb{N}$, für das die Summe von n und ihrem Kehrwert minimal ist.	Zielfunktion: $s(n)=n+\frac{1}{n}$ Extrema: Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $s(n)=n+\frac{1}{n}$ $s'(n)=1-\frac{1}{n^2}$ $s''(n)=\frac{2}{n^3}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $s'(n)=0$: $1-\frac{1}{n^2}=0 \quad \vert \cdot n^2$ $n^2-1=0 \quad \vert +1$ $n^2=1 \quad \vert \sqrt{\ }$ $n_{1,2}=\pm\sqrt{1}$ $n_{1,2}=\pm 1$ $n_1=1$ $n_2=-1$ Untersuche die Stelle $n=1$: $s''(1)>0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $n=1$ Untersuche die Stelle $n=-1$: $s''(-1)<0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $n=-1$ Überprüfung der Randwerte: Untersuche das Monotonieverhalten von s für $0<n$: Für $n\to 0$ geht $s'(n)\to\infty$ und für $n\to\infty$ geht $s'(n)\to\infty$, damit ist s vor dem Tiefpunkt monoton fallend und nach dem Tiefpunkt monoton steigend. Es folgt, dass s an der Stelle $n=1$ ein globales Minimum hat. Ergebnis: 1
12	Gesucht ist ein Punkt $Q(u \mid v)$ auf dem Graphen von $f(x)=x^2+1$, dessen Abstand zu $P(1 \mid 1)$ minimal ist.	Term: $D=\sqrt{(u-1)^2+(v-1)^2}$ Nebenbedingungen: $v=f(u)=u^2+1$ Zielfunktion: $D(u)=\sqrt{(u-1)^2+(v-1)^2}$ $=\sqrt{(u-1)^2+(u^2+1-1)^2}$ $=\sqrt{(u-1)^2+(u^2)^2}$ $=\sqrt{u^2-2u+1+u^4}$ $=\sqrt{u^4+u^2-2u+1}$ Extrema: Mit dem GTR: $\approx 0{,}5898$ (grafische Lösung) Ergebnis: $\approx 0{,}5898$

<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Aufgabe</th><th>Lösung</th></tr>
<tr>
<td>13</td>
<td>



Das Rechteck hat eine Fläche von $A = 32\text{m}^2$. Wie lang muss r sein, damit der Umfang der Form so gering wie möglich ist?

</td>
<td>

Term:
$U = 2(l + \pi r)$
Nebenbedingungen: $32 = l \cdot 2r$
Definitionsbereich: $0 < l$, $0 < r$
Zielfunktion:

$$\begin{aligned} U(r) &= 2(l+\pi r) \\ &= 2\left(\frac{16}{r} + \pi r\right) \\ &= \frac{32}{r} + 2\pi r \\ &= 2\pi r + \frac{32}{r} \end{aligned}$$

Extrema:
Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} U(r) &= 2\pi r + \frac{32}{r} \\ U'(r) &= 2\pi - \frac{32}{r^2} \\ U''(r) &= \frac{64}{r^3} \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $U'(r) = 0$:

$$\begin{aligned} 2\pi - \frac{32}{r^2} &= 0 && \mid \cdot r^2 \\ 2\pi r^2 - 32 &= 0 && \mid +32 \\ 2\pi r^2 &= 32 && \mid \div 2\pi \\ r^2 &= \frac{16}{\pi} && \mid \sqrt{} \\ r_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{16}{\pi}} \\ r_{1,2} &= \pm 4\sqrt{\frac{1}{\pi}} \\ r_1 &= 4\sqrt{\frac{1}{\pi}} \\ r_2 &= -4\sqrt{\frac{1}{\pi}} \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $r = 4\sqrt{\frac{1}{\pi}}$:

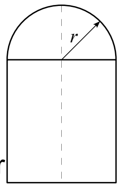
$U''\left(4\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $r = 4\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

Untersuche die Stelle $r = -4\sqrt{\frac{1}{\pi}}$:

$U''\left(-4\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $r = -4\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

Überprüfung der Randwerte:
Untersuche das Monotonieverhalten von U für $0 < r$:
Für $r \to 0$ geht $U'(r) \to \infty$ und für $r \to \infty$ geht $U'(r) \to \infty$, damit ist U vor dem Tiefpunkt monoton fallend und danach monoton steigend. Es folgt, dass U an der Stelle $r = 4\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ ein globales Minimum besitzt.

</td>
</tr>
</table>

Nr.	Aufgabe	Lösung
		Ergebnis: $4\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ $(\approx 2{,}2568)$
14	Nebenstehende Form hat eine Fläche von $A=72\,\mathrm{m}^2$. Wie breit ist die Form, wenn der Umfang minimal ist? 	Term: $U = \pi r + 2h + 2r$ Nebenbedingungen: $72 = \frac{\pi r^2}{2} + 2r \cdot h$ und $b = 2r$ Definitionsbereich: $0 < r$, $0 < h$ Zielfunktion: $U(r) = \pi r + 2h + 2r$ $= \pi r + 2\left(\frac{36}{r} - \frac{\pi r}{4}\right) + 2r$ $= \pi r + \frac{72}{r} - \frac{\pi r}{2} + 2r$ $= \frac{\pi + 4}{2} r + \frac{72}{r}$ Extrema:

Nr.	Aufgabe	Lösung
		Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $U(r) = \frac{\pi+4}{2}r+\frac{72}{r}$ $U'(r) = \frac{\pi+4}{2}-\frac{72}{r^2}$ $U''(r) = \frac{144}{r^3}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $U'(r)=0$: $\frac{\pi+4}{2}-\frac{72}{r^2} = 0 \quad \mid \cdot r^2$ $\frac{\pi+4}{2}r^2-72 = 0 \quad \mid +72$ $\frac{\pi+4}{2}r^2 = 72 \quad \mid \div\frac{\pi+4}{2}$ $r^2 = \frac{144}{\pi+4} \quad \mid \sqrt{\ }$ $r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{144}{\pi+4}}$ $r_{1,2} = \pm 12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}$ $r_1 = 12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}$ $r_2 = -12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}$ Untersuche die Stelle $r=12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}$: $U''\left(12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}\right)>0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $r=12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}$ Untersuche die Stelle $r=-12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}$: $U''\left(-12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}\right)<0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $r=-12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}$ Überprüfung der Randwerte: Untersuche das Monotonieverhalten von U für $0<r$: Für $r\to 0$ geht $U'(r)\to\infty$ und für $r\to\infty$ geht $U'(r)\to\infty$, damit ist U vor dem Tiefpunkt monoton fallend und nach dem Tiefpunkt monoton steigend. Es folgt, dass U an der Stelle $r=12\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}$ ein globales Minimum besitzt. Ergebnis: $24\sqrt{\frac{1}{\pi+4}}$ $(\approx 8{,}981)$
15	Sei K_f das Schaubild von $f(x)=-\frac{2}{9}x^2+x+2$ und K_h das Schaubild von $h(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{3}x+2$ An welcher Stelle ist der	Zielfunktion: $D(x) = f(x)-h(x)$ $= -\frac{2}{9}x^2+x+2-\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{3}x+2\right)$ $= -\frac{5}{9}x^2+\frac{10}{3}x$ Extrema:

Nr.	Aufgabe	Lösung
	Abstand von K_f und K_h im Intervall $[0;\, 6]$ am größten?	Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $D(x) = -\frac{5}{9}x^2+\frac{10}{3}x$ $D'(x) = -\frac{10}{9}x+\frac{10}{3}$ $D''(x) = -\frac{10}{9}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $D'(x)=0$: $-\frac{10}{9}x+\frac{10}{3} = 0 \quad \vert -\frac{10}{3}$ $-\frac{10}{9}x = -\frac{10}{3} \quad \vert \div\left(-\frac{10}{9}\right)$ $x = 3$ Untersuche die Stelle $x=3$: $D''(3)<0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x=3$ Überprüfung der Randwerte: Da $D(x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist, hat $D(x)$ an der Stelle $x=3$ ein globales Maximum. Ergebnis: 3
16	Die Oberfläche einer Dose ist $O=1200\,\text{cm}^2$. Welchen Durchmesser muss die Dose haben, damit die Länge der Schweißnaht minimal ist? 	Term: $l=2\pi d+h$ Nebenbedingungen: $1200=\pi d\left(h+\frac{d}{2}\right)$ Definitionsbereich: $0<d$, $0<h$ Zielfunktion: $l(d) = 2\pi d+h$ $= 2\pi d+\frac{1200}{\pi d}-\frac{d}{2}$ $= \frac{4\pi-1}{2}d+\frac{1200}{\pi d}$ Extrema:

Nr.	Aufgabe	Lösung
		Die Funktion und alle benötigten Ableitungen: $l(d) = \frac{4\pi-1}{2}d+\frac{1200}{\pi d}$ $l'(d) = \frac{4\pi-1}{2}-\frac{1200}{\pi d^2}$ $l''(d) = \frac{2400}{\pi d^3}$ Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung: Setze $l'(d)=0$: $\frac{4\pi-1}{2}-\frac{1200}{\pi d^2} = 0 \quad \vert \cdot d^2$ $\frac{4\pi-1}{2}d^2-\frac{1200}{\pi} = 0 \quad \vert +\frac{1200}{\pi}$ $\frac{4\pi-1}{2}d^2 = \frac{1200}{\pi} \quad \vert \div\frac{4\pi-1}{2}$ $d^2 = \frac{2400}{4\pi^2-\pi} \quad \vert \sqrt{\ }$ $d_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2400}{4\pi^2-\pi}}$ $d_{1,2} = \pm 20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}$ $d_1 = 20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}$ $d_2 = -20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}$ Untersuche die Stelle $d=20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}$: $l''\left(20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}\right) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $d=20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}$ Untersuche die Stelle $d=-20\sqrt{\frac{6}{4\pi-1}}$: $l''\left(-20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}\right) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $d=-20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}$ Überprüfung der Randwerte: Untersuche das Monotonieverhalten von $l(d)$ für $0<d$: Für $d\to 0$ geht $l(d)\to\infty$ und für $d\to\infty$ geht $l(d)\to\infty$. Damit ist $l(d)$ vor dem Tiefpunkt monoton fallend und danach monoton steigend. Es folgt, dass $l(d)$ an der Stelle $d=20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}$ ein globales Minimum besitzt. Ergebnis: $20\sqrt{\frac{6}{4\pi^2-\pi}}$ $(\approx 8{,}127)$

