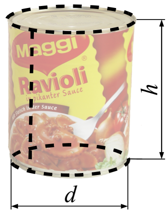
Extremwertaufgaben

Die Oberfläche einer Dose ist $O = 1200\,\text{cm}^2$. Welchen Durchmesser muss die Dose haben, damit die Länge der Schweißnaht minimal ist?



Lösung

Modellieren:

Term: $l = 2\pi d + h$

Nebenbedingungen und Definitionsbereich:

Nebenbedingungen: $1200 = \pi d\left(h + \frac{d}{2}\right)$

Definitionsbereich: $0 < d$, $0 < h$

Optimieren:

Zielfunktion:
$$\begin{aligned} l(d) &= 2\pi d + h \\ &= 2\pi d + \frac{1200}{\pi d} - \frac{d}{2} \\ &= \frac{4\pi - 1}{2} d + \frac{1200}{\pi d} \end{aligned}$$

Extrema:

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:
$$\begin{aligned} l(d) &= \frac{4\pi - 1}{2} d + \frac{1200}{\pi d} \\ l'(d) &= \frac{4\pi - 1}{2} - \frac{1200}{\pi d^2} \\ l''(d) &= \frac{2400}{\pi d^3} \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $l'(d) = 0$:
$$\begin{aligned} \frac{4\pi - 1}{2} - \frac{1200}{\pi d^2} &= 0 && \left|\ \cdot d^2\right. \\ \frac{4\pi - 1}{2} d^2 - \frac{1200}{\pi} &= 0 && \left|\ + \frac{1200}{\pi}\right. \\ \frac{4\pi - 1}{2} d^2 &= \frac{1200}{\pi} && \left|\ \div \frac{4\pi - 1}{2}\right. \\ d^2 &= \frac{2400}{4\pi - 1} && \left|\ \sqrt{\ }\right. \\ d_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{2400}{4\pi - 1}} \\ d_{1,2} &= \pm 20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}} \\ d_1 &= 20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}} \\ d_2 &= -20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}} \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $d = 20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}}$:

$l''\left(20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}}\right) > 0 \;\Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $d = 20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}}$

Untersuche die Stelle $d = -20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}}$:

$l''\left(-20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}}\right) < 0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $d = -20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}}$

Randwertuntersuchung:

$$l\left(20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}}\right) = \frac{10\sqrt{6(4\pi - 1)}}{\pi} + 2\pi - \frac{1}{2} \approx 32{,}3002$$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \infty &\Rightarrow\quad l(d) &\rightarrow \infty \\ x &\rightarrow -\infty &\Rightarrow\quad l(d) &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Damit ist das globale Minima bei

$20\sqrt{\frac{6}{4\pi - 1}}$

$(\approx 14{,}4048)$

