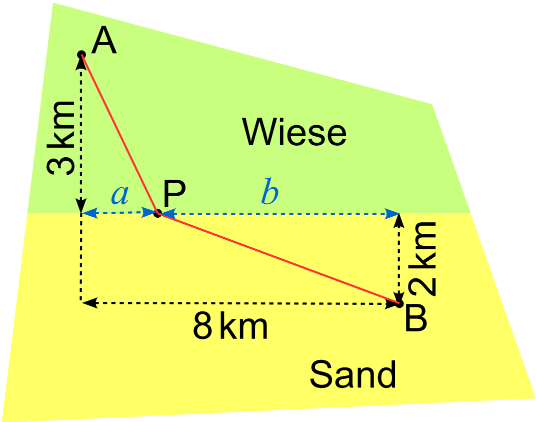
Optimieren

Aufgaben

Weg

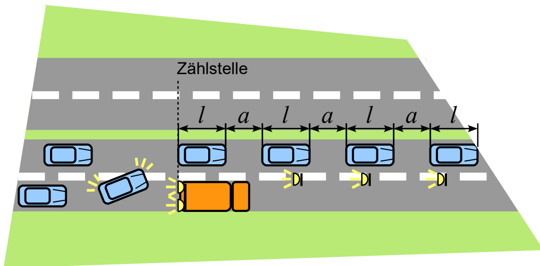


Herr Kramer möchte in kürzester Zeit vom Punkt A nach Punkt B laufen. Auf der Wiese kommt Herr Kramer mit $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ voran und auf dem Sand nur mit $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die Zeit t in Stunden wird durch den Term $t = \frac{\overline{AP}}{6} + \frac{\overline{PB}}{4}$ berechnet. Nebenbedingungen sind: $\overline{AP} = \sqrt{9+a^2}$, $\overline{PB} = \sqrt{4+b^2}$, $b = 8-a$.

An welcher Stelle P wird Herr Kramer die Wiese verlassen müssen? Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 1.

Autoschlange

An einer Baustelle wird die zweispurige Fahrbahn auf eine Fahrspur verengt. Gehen Sie davon aus, dass alle Fahrzeuge die gleiche Länge $l = 5\text{ m}$ haben, mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit unterwegs sind und alle Fahrzeuge den gleichen Abstand $a = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}$ zu einander haben.

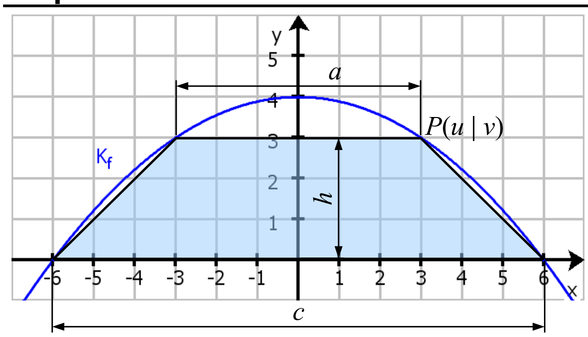


Aus Sicherheitsgründen soll die Geschwindigkeit $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nicht überschritten werden.

Der Durchfluss D wird durch den Term $D = \frac{1000\,v}{l+a}$ berechnet.

Bei welcher Geschwindigkeit können am meisten Fahrzeuge die Zählstelle passieren? Ermitteln Sie das Ergebnis mit Hilfe des grafischen Taschenrechners und überprüfen Sie es anhand der Lösungskarte 2.

Trapez



f ist eine Funktion mit $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 4$. K_f ist der Graph von f. Die Größe des Trapez wird durch den Term $A = \frac{a+c}{2}\cdot h$ beschrieben. Nebenbedingungen sind $a = 2u$, $c = 12$ und $h = v = f(u) = -\frac{1}{9}u^2 + 4$. Für welches u hat das einbeschriebene Trapez eine maximale Flächengröße? Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 3.

Optimieren

Lösungskarte

1. Weg

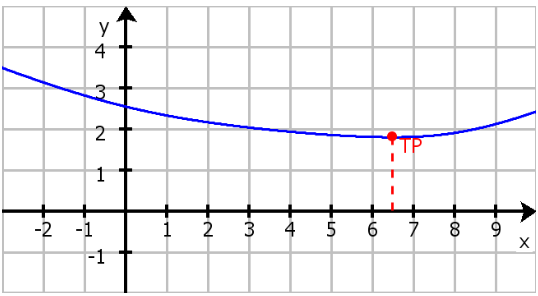
Zielfunktion und Extrema bestimmen:

Funktion bilden: $t(a) = \frac{\overline{AP}}{6} + \frac{\overline{PB}}{4}$

Funktion nach einer Variablen auflösen:

$$\begin{aligned} t(a) &= \frac{\sqrt{9+a^2}}{6} + \frac{\sqrt{4+b^2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{9+a^2}}{6} + \frac{\sqrt{4+(8-a)^2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{9+a^2}}{6} + \frac{\sqrt{a^2-16a+68}}{4} \end{aligned}$$

Extrema bestimmen: Mit dem GTR: $a \approx 6{,}5\,\text{km}$



Im Definitionsbereich $a \in [0;\ 8]$ hat $t(a)$ an der Stelle $a \approx 6{,}5\,\text{km}$ ein absolutes Minimum.

Optimieren

Lösungskarte

2. Autoschlange

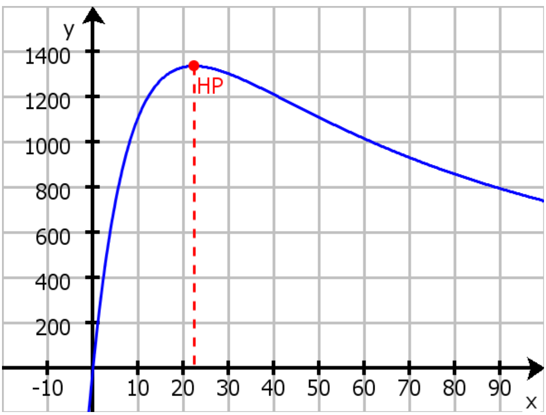
Zielfunktion und Extrema bestimmen:

Funktion bilden: $D(v) = \frac{1000\,v}{l + a}$

Funktion nach einer Variablen auflösen:

$$D(v) = \frac{1000\,v}{5 + \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10}}$$

Extrema bestimmen:
Mit dem GTR: Hochpunkt bei $v = 22{,}36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$



Bei einer Geschwindigkeit von $v = 22{,}36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ können in einer Stunde die meisten Fahrzeuge die Zählstelle passieren.

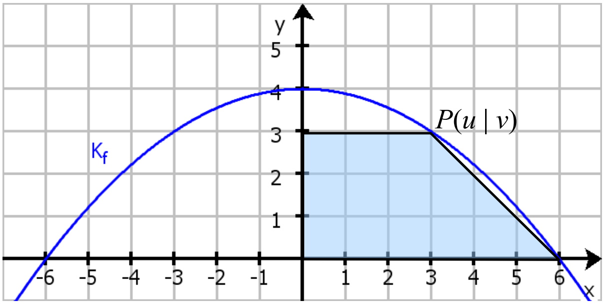
Optimieren

Lösungskarte

3. Trapez

Es genügt die Fläche des halben Trapez zu untersuchen. Hat sie eine maximale Größe, so auch die des ganzen Trapez.

$$A_{\frac{1}{2}} = \frac{a+c}{4} \cdot h$$



Zielfunktion bilden und nach einer Variable auflösen:

$$\begin{aligned}
A_{\frac{1}{2}}(u) &= \frac{a+c}{4} \cdot h \\
&= \frac{2u+12}{4} \cdot \left(-\frac{1}{9}u^2+4\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}u+3\right)\left(-\frac{1}{9}u^2+4\right) \\
&= -\frac{1}{18}u^3+2x-\frac{1}{3}u^2+12 \\
&= -\frac{1}{18}u^3-\frac{1}{3}u^2+2x+12
\end{aligned}$$

Optimieren

Lösungskarte

Extrema bestimmen:

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$A_{\frac{1}{2}}(u) = -\frac{1}{18}u^3 - \frac{1}{3}u^2 + 2x + 12$$

$$A_{\frac{1}{2}}'(u) = -\frac{1}{6}u^2 - \frac{2}{3}u + 2$$

$$A_{\frac{1}{2}}''(u) = -\frac{1}{3}u - \frac{2}{3}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $A_{\frac{1}{2}}'(u)=0$: mit Hilfe der Lösungsformel
ergibt sich $u=-6 \lor u=2$

$A_{\frac{1}{2}}''(-6) = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $u=-6$

$A_{\frac{1}{2}}''(2) = -\frac{4}{3} < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $u=2$

Für $u = 2$ wird die Fläche des Trapez am größten.