e-Funktionen (Aufgaben mit Lösungen)

Aufgabe 1

K_a sind die Graphen von Funktionen mit $f_a(x)=-a\,x^3\,\mathrm{e}^{kx}$ und K_h der Graph einer Funktion mit $h(x)=4\,x\,\mathrm{e}^{kx}$, $a, k \in \mathbb{R}^*$

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Schnittpunkte von K_a und K_h unabhängig von k ist. Bestimmen Sie alle Werte von a, so dass K_a und K_h nur einen gemeinsamen Kurvenpunkt haben.

Lösungsvorschlag:

Schnittpunkte von K_a und K_h: $f_a(x)=h(x) \Rightarrow$

Löse nach x auf:

$$\begin{aligned} -a\,x^3\,\mathrm{e}^{2x}-4\,x\,\mathrm{e}^{2x} &= 0 \quad \mid \mathrm{e}^{2x} \text{ ausklammern} \\ \mathrm{e}^{2x}\left(-a\,x^3-4\,x\right) &= 0 \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{2x}>0$ für alle $x \Rightarrow -a\,x^3-4\,x=0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$\begin{aligned} -a\,x^3-4\,x &= 0 \quad \mid x \text{ ausklammern} \\ x\left(-a\,x^2-4\right) &= 0 \end{aligned}$$

$x=0$ oder $-a\,x^2-4=0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$x_1 = 0$$

$$\begin{aligned} -a\,x^2-4 &= 0 && \mid +4 \\ -a\,x^2 &= 4 && \mid \div(-a),\ a\neq 0 \\ x^2 &= -\frac{1}{a} && \mid \sqrt{\ },\ a<0 \\ x_{2,3} &= \pm\sqrt{-\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Schnittpunkte von K_a und K_h unabhängig von k sind.

K_a und K_h schneiden sich immer im Ursprung. Es gibt keine weiteren Schnittpunkte, wenn $a\geq 0$.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen mit $f_a(x)=-a\,\mathrm{e}^{-2x}+5$, $a\in\mathbb{R}^*$. K_a sind die Graphen von f_a.

Für welchen Wert von a verläuft K_a durch den Ursprung?

Wie viele Nullstellen kann K_a maximal besitzen? Für welche Werte von a besitzt K_a keine Nullstellen? Begründen Sie ihre Antworten mit Hilfe des Graphen.

Lösungsvorschlag:

$-a\,\mathrm{e}^0+5=0 \Rightarrow -a+5=0 \Rightarrow$ für $a=5$ verläuft K_a durch den Ursprung.

Fall $a>0$: $x \to -\infty \Rightarrow f_a(x) \to -\infty$ und $x \to \infty \Rightarrow f_a(x) \to 5 \Rightarrow K_a$ ist monoton steigend. Damit kann K_a maximal eine Nullstelle haben.

Fall $a<0$: $x \to -\infty \Rightarrow f_a(x) \to \infty$ und $x \to \infty \Rightarrow f_a(x) \to 5 \Rightarrow K_a$ ist monoton fallend und es ist $f_a(x)>0$, damit hat K_a keine Nullstelle.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen f_a und h_a mit $f_a(x)=x^2 e^{2x}+\frac{2}{a}x^2$ und $h_a(x)=\frac{11}{a}x^2$,

$a \in \mathbb{R}^*$.

Bestimmen Sie alle Werte von a, für die sich die Graphen von f_a und h_a berühren.

<u>Lösungsvorschlag:</u>

Suche nach „doppelte“ Schnittpunkte: $f_a(x)=h_a(x) \Rightarrow$

In Nullform bringen:

$$\begin{aligned} x^2 e^{2x}+\frac{2}{a}x^2 &= \frac{11}{a}x^2 && \mid \cdot a \\ a x^2 e^{2x}+2x^2 &= 11x^2 && \mid -11x^2 \\ a x^2 e^{2x}-9x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Löse nach x auf:

$$\begin{aligned} a x^2 e^{2x}-9x^2 &= 0 && \mid x^2 \text{ ausklammern} \\ x^2\left(a e^{2x}-9\right) &= 0 \end{aligned}$$

$x^2=0$ oder $a e^{2x}-9=0$ (Satz vom Nullprodukt)

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 && \mid \sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a e^{2x}-9 &= 0 && \mid +9 \\ a e^{2x} &= 9 && \mid \div a, a\neq 0 \\ e^{2x} &= \frac{9}{a} && \mid \ln, a>0 \\ 2x &= \ln\left(\frac{9}{a}\right) && \mid \div 2 \\ x &= \frac{\ln\left(\frac{9}{a}\right)}{2} \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{\ln\left(\frac{9}{a}\right)}{2}, a>0$$

Fall $a\leq 0$: Es gibt eine doppelte Lösung $x=0 \Rightarrow$ die Graphen berühren sich.

Fall $a=9$: Es gibt eine dreifache Lösung $x=0 \Rightarrow$ die Graphen schneiden sich.

Fall $a>0 \wedge a \neq 9$: Es gibt eine doppelte Lösung $x=0$ und eine einfache Lösung $x=\frac{\ln\left(\frac{9}{a}\right)}{2}$

$\Rightarrow$ die Graphen berühren sich an der Stelle $x=0$.

Aufgabe 4

Geben sind die Funktionen $f_k(x)=(x-1)\,e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$. K_k sind die zugehörigen Graphen. Bestimmen Sie drei Gemeinsamkeiten aller Graphen.

Lösungsvorschlag:

Untersuche die Nullstellen: $f_k(x)=0 \Rightarrow (x-1)\,e^{kx}=0$, da $e^{kx}>0$ für alle x muss nach dem Satz vom Nullprodukt $(x-1)=0$ sein $\Rightarrow x=1$. Alle K_k haben die gemeinsame Nullstelle bei $x=0$.

Untersuche Schnittpunkt mit der y-Achse: $f_k(0)=-1$. Alle K_k haben den gemeinsamen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Untersuche auf Asymptoten:

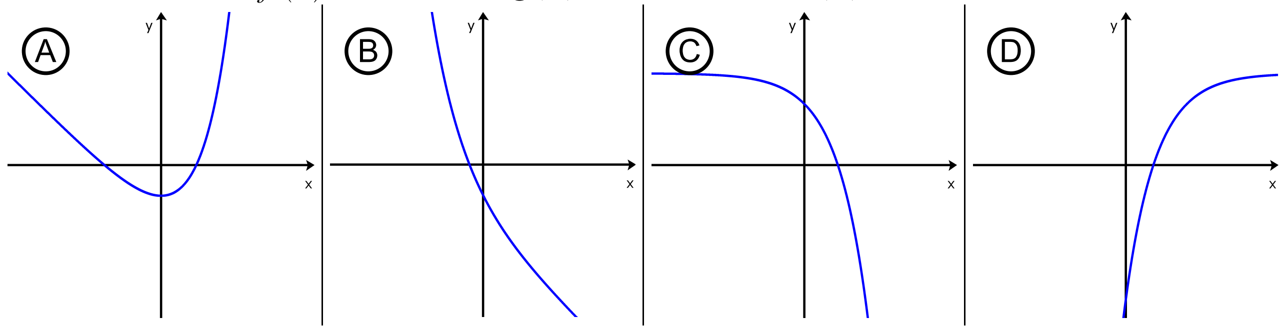
Fall $k>0$: $x \to -\infty \Rightarrow \underbrace{(x-1)}_{\to -\infty}\underbrace{e^{kx}}_{\to 0} \to 0$, da e^{kx} schneller gegen Null geht, als $|x-1|$ wächst.

Fall $k<0$: $x \to \infty \Rightarrow \underbrace{(x-1)}_{\to \infty}\underbrace{e^{kx}}_{\to 0} \to 0$, da e^{kx} schneller gegen Null geht, als $x-1$ wächst.

Damit haben alle K_k die gleiche Asymptote mit der Gleichung $y=0$.

Aufgabe 5

Ordnen Sie folgende Funktionsgleichungen den Schaubildern zu und Begründen Sie ihre Entscheidungen: $f(x)=a\,e^{-x-a}-a$, $g(x)=e^{-ax}+ax+a$, $h(x)=a\,e^{x}-a$, $a \in \mathbb{R}_-^*$



Lösungsvorschlag:

$f(x)$ gehört zu D, denn der Graph hat eine Asymptote oberhalb der x-Achse und ist monoton steigend.

$g(x)$ gehört zu A, denn die Asymptote hat eine negative Steigung und einen negativen y-Achsenabschnitt. Außerdem gilt: $x \to \infty \Rightarrow g(x) \to \infty$.

$h(x)$ gehört zu C, da der Graph eine Asymptote oberhalb der x-Achse hat und monoton fallend ist.

